Unidad 4 – Espacios vectoriales. Aplicaciones lineales

PÁGINA 81

cuestiones iniciales

1. Halla x, y, z de modo que sea cierta la siguiente igualdad:

$$x(1,\ 2,\ -1) + y(3,\ 0,\ 1) + z(2,\ 1,\ 2) = (-1,\ -5,\ -3)$$

2. Estudia si la suma de polinomios de primer grado verifica las propiedades: asociativa, conmutativa, elemento neutro y existencia de elemento simétrico.

3. Considera el conjunto de matrices simétricas 2×2 de la forma:

$$\left\{ \begin{pmatrix} x & a \\ a & y \end{pmatrix} \middle| \, x, a, y \in \mathbb{R} \right\}$$

Si sumas dos matrices de este tipo ¿qué obtienes?, y si multiplicas un número real por una matriz de este conjunto ¿qué obtienes?

Encuentra en este conjunto el elemento neutro y el elemento simétrico respecto a la suma de matrices.

SOLUCIONES

1. La solución queda:

Operando los vectores e igualando los vectores resultantes, obtenemos:

$$\begin{cases} x + 3y + 2z = -1 \\ 2x \qquad + \ z = -5 \\ -x + \ y + 2z = -3 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema por el método de Gauss:

$$\begin{cases} x + 3y + 2z = -1 \\ \quad 6y + 3z = \ \ 3 \\ \quad 4y + 4z = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y + 2z = -1 \\ \quad 2y + \ z = \ \ 1 \\ \quad y \qquad = \ \ 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \\ z = -3 \end{cases}$$

Los valores buscados son $x = -1$, $y = 2$, $z = -3$.

2. La solución queda:

Sean los polinomios $A(x) = a_1x + b_1$, $B(x) = a_2x + b_2$ y $C(x) = a_3x + b_3$.

- Propiedad asociativa. Se verifica al cumplirse:

$$A(x) + [B(x) + C(x)] = a_1x + b_1 + [a_2x + b_2 + a_3x + b_3] = a_1x + b_1 + (a_2 + a_3)x + (b_2 + b_3) =$$
$$= (a_1 + a_2 + a_3)x + (b_1 + b_2 + b_3)$$

$$[A(x) + B(x)] + C(x) = [a_1x + b_1 + a_2x + b_2] + a_3x + b_3 = (a_1 + a_2)x + (b_1 + b_2) + a_3x + b_3 =$$
$$= (a_1 + a_2 + a_3)x + (b_1 + b_2 + b_3)$$

- Propiedad conmutativa. Se verifica ya que:
  $A(x)+B(x)=a_1x+b_1+a_2x+b_2 =(a_1+a_2)x+(b_1+b_2)$
  $B(x)+A(x)=a_2x+b_2+ a_1x+b_1 =(a_2+a_1)x+(b_2+b_1)$

- Elemento neutro. Es el polinomio $0x+0$, ya que cumple:
  $(ax+b)+(0x+0)=(a+0)x+(b+0)=ax+b$

- Elemento simétrico. Para un polinomio cualquiera $ax+b$ su simétrico es el polinomio $-ax-b$ ya que: $(ax+b)+(-ax-b)=(a-a)x+(b-b)=0x+0$

Son ciertas estas propiedades al ser $a, a_1, a_2, a_3, b, b_1, b_2, b_3$ números reales.

3. Al sumar dos madtrices de este tipo se obtiene otra del mismo tipo.

$$\begin{pmatrix} x & a \\ a & y \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} x' & b \\ b & y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x+x' & a+b \\ a+b & y+y' \end{pmatrix}$$

Al multiplicar un número real por una matriz de este tipo se obtiene otra de mismo tipo.

$$t\cdot\begin{pmatrix} x & a \\ a & y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} tx & ta \\ ta & ty \end{pmatrix}$$

El elemento neutro de este conjunto de matrices es la matriz $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. El elemento simétrico de la matriz $\begin{pmatrix} x & a \\ a & y \end{pmatrix}$ respecto de la suma de matrices es la matriz $\begin{pmatrix} -x & -a \\ -a & -y \end{pmatrix}$.

PÁGINA 97

A C T I V I D A D E S

■ Aplica la técnica de ensayo y error en la resolución de los siguientes problemas:

1. **Lentejas y garbanzos.** En un puesto del mercado tienen 5 sacos de garbanzos y uno de lentejas. Un cliente se lleva una cierta cantidad de garbanzos; después, otro cliente se lleva el doble de garbanzos que el cliente anterior, quedándose sólo el saco de lentejas. El vendedor sólo vende sacos completos. Sabiendo que los diferentes sacos son de 19, 18, 31, 16, 15 y 20 kg, ¿de cuántos kilogramos es el saco de lentejas?

2. **Tres cartas.** De una baraja española de 40 cartas, extraemos 3 y las colocamos en una fila horizontal. Las cartas verifican las condiciones siguientes: a la derecha del *caballo* hay 1 o 2 *sotas*; a la izquierda de la *sota*, hay 1 o 2 *sotas*; a la izquierda de un *oro*, hay una o dos *copas*; y a la derecha de una *copa*, hay una o dos *copas*. ¿De qué tres cartas se trata?

3. **Primas.** Dos amigos, Pedro y Luisa, se encuentran una tarde y Pedro le dice a Luisa: «Ayer estuve con mis tres primas». Luisa le pregunta: «¿qué edad tienen?», a lo que Pedro contesta: «el producto de sus edades es 2 450 y la suma de las mismas es el doble de tu edad». Luisa dijo que con estos datos no podía saber las edades. Pedro añadió: «yo soy por lo menos un año más joven que la más vieja». Por supuesto, Luisa conoce la edad de Pedro. ¿Cuáles son las edades de las primas de Pedro y cuál es la edad de Luisa?

SOLUCIONES

1. Sumando los kilos de todos los sacos, obtenemos 119 kg. Como un cliente se lleva cierta cantidad y otro se lleva el doble de esa cantidad quedando sólo el caso de lentejas, entonces al quitar a 119 kg, el saco de lentejas debe quedar un número que es múltiplo de 3, esto se cumple con:

$$119-20=99.$$

   Un cliente lleva 33 kg en los sacos de 18 kg y 15 kg y el otro cliente se lleva 66 kg en los sacos de 19 kg, 31 kg, 16 kg. El saco de lentejas es el que pesa 20 kg.

2. El caballo y las sotas las señalamos con CSS. Para que verifiquen las condiciones han de ser:

$$C_c\, S_o\, S_c$$

   Por tanto, las cartas son:
   - Caballo de copas.
   - Sota de oros.
   - Sota de copas.

3. Descomponiendo 2 450 en factores, obtenemos: $2\,450 = 2 \cdot 5^2 \cdot 7^2$

Las posibles edades de las tres primas son:

Prima 1	Prima 2	Prima 3	Suma	Luisa
2	25	49	76	38
5	5	98	108	54
5	10	49	64	32
7	7	50	64	32
2	35	35	72	36
1	49	50	100	50
7	14	25	46	23
7	10	35	52	26
5	14	35	54	27

Una vez hecha la tabla con todas las posibilidades, observamos que hay un resultado suma repetido, por tanto ahí está la razón de que Luisa le dijera a Pedro que con esos datos no podía saber las edades. La edad de Luisa es de 32 años. Luisa sabe la edad de Pedro. Si Pedro hubiera tenido 48 años o menos, no quedaría claro, por tanto Pedro ha de tener 49 años y las primas 7, 7 y 50 años.

PÁGINA 102

ACTIVIDADES FINALES

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Demuestra que el conjunto de matrices 2×2 es un espacio vectorial real respecto a las operaciones suma de matrices y producto de un número real por una matriz, dadas por:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+a_1 & b+b_1 \\ c+c_1 & d+d_1 \end{pmatrix}$$

$$t \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \cdot a & t \cdot b \\ t \cdot c & t \cdot d \end{pmatrix}$$

2. Sea $(V, +, \bullet_{\mathbb{R}})$ un espacio vectorial real. Demuestra que son ciertas las siguientes propiedades:

a) $(t - s) \cdot \vec{v} = t \cdot \vec{v} - s \cdot \vec{v}$ $\quad \forall t, s \in \mathbb{R}$ y $\forall \vec{v} \in V$

b) $t \cdot (\vec{v} - \vec{w}) = t \cdot \vec{v} - t \cdot \vec{w}$ $\quad \forall t \in \mathbb{R}$ y $\forall \vec{v}, \vec{w} \in V$

c) Si $\vec{u} + \vec{w} = \vec{v} + \vec{w} \Rightarrow \vec{u} = \vec{v}$ $\quad \forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$

d) $t \cdot \vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow t = 0$ o $\vec{v} = \vec{0}$

3. Estudia cuáles de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ son subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$:

a) $A = \{(x, x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$

b) $B = \{(x, y, -x-y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$

c) $C = \{(x, 2x, 3x) \mid x \in \mathbb{R}\}$

d) $D = \{(x, y, z) \mid x + y = 3;\ \ x, y, z \in \mathbb{R}\}$

4. Estudia si el conjunto de matrices que conmutan con la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ es un subespacio vectorial del espacio vectorial de las matrices 2×2.

5. En el espacio vectorial real de los polinomios $\{\mathbb{P}_2(x), +, \bullet_{\mathbb{R}}\}$ de grado menor o igual que 2, estudia si el subconjunto $\{P'(x), P''(x)\}$, siendo $P'(x)$ y $P''(x)$ los polinomios derivados de $P(x)$ y $P'(x)$, respectivamente, es un subespacio vectorial.

6. En el espacio vectorial real $(\mathbb{R}^3, +, \bullet_{\mathbb{R}})$ consideramos los vectores $\vec{v} = (1, 2, 0)$ y $\vec{w} = (1, 1, -1)$. Encuentra un vector $\vec{u}$ en cada uno de los siguientes casos:

a) De forma que $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sean linealmente dependientes.

b) De forma que $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sean linealmente independientes.

7. Halla el valor o valores de a de modo que el vector $(1, -6, a)$ sea linealmente independiente de los vectores $(2, 0, -1)$, $(1, 2, 1)$. ¿Cuánto ha de valer a para que el vector dado sea linealmente dependiente de los vectores $(2, 0, -1)$, $(1, 2, 1)$?

8. Halla el valor de x para que los siguientes vectores de $\mathbb{R}^3$ sean linealmente dependientes:

$$(x, 2, 0),\ (x, 3x, 5) \text{ y } (1, x, 5)$$

9. Estudia si el conjunto de vectores de $\mathbb{R}^3$ $\{(1, 2, 3), (0, 2, 4), (0, 2, 0)\}$ forman una base de $\mathbb{R}^3$. En caso afirmativo halla las coordenadas del vector $(1, 1, 1)$ respecto de ella.

SOLUCIONES

1. Las propiedades asociativa y conmutativa se verifican ya que la suma de números reales que se establecen en los elementos de las matrices cumple las propiedades asociativa y conmutativa.

   El elemento neutro para la suma es la matriz nula $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   El elemento simétrico de la matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ para la suma es $\begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix}$.

   Veamos que se cumplen las propiedades para el producto.

2. a) $(t-s)\cdot\vec{v}=\left[t+(-s)\right]\cdot\vec{v}=t\cdot\vec{v}+(-s)\cdot\vec{v}=t\cdot\vec{v}+(-s\cdot\vec{v})=t\cdot\vec{v}-s\cdot\vec{v}\ \ \forall t,s\in\mathbb{R}$ y $\forall\vec{v}\in V$.

   b) Sean $t\in\mathbb{R}\ y\ \vec{v},\vec{w}\in V$, se cumple:

   $t\cdot(\vec{v}-\vec{w})=t\cdot[(\vec{v}+(-\vec{w})]=t\cdot\vec{v}+t\cdot(-\vec{w})=t\cdot\vec{v}+(-t\cdot\vec{w})=t\vec{v}-t\vec{w}.$

   c) Sean $\vec{u},\vec{v},\vec{w}\in V$ se cumple:

   $\vec{u}+\vec{w}+\vec{v}+\vec{w}\Rightarrow\vec{u}+\vec{w}-\vec{w}=\vec{v}+\vec{w}-\vec{w}\Rightarrow\vec{u}+(\vec{w}-\vec{w})=\vec{v}+(\vec{w}-\vec{w})\Rightarrow\vec{u}+\vec{0}=\vec{v}+\vec{0}\Rightarrow\vec{u}=\vec{v}.$

   d) Veamos la demostración de la condición necesaria. Sea $t\cdot\vec{v}=\vec{0}$ y $t\neq 0$, entonces existe $t^{-1}=\frac{1}{t}$ y se cumple:

   $$t\cdot\vec{v}=\vec{0}\Rightarrow\frac{1}{t}\cdot(t\cdot\vec{v})=\frac{1}{t}\cdot\vec{0}\Rightarrow\left(\frac{1}{t}\cdot t\right)\vec{v}=\vec{0}\Rightarrow$$
   $$\Rightarrow 1\cdot\vec{v}=\vec{0}\Rightarrow\vec{v}=\vec{0}.$$

   Sea $t\cdot\vec{v}=\vec{0}$ y $\vec{v}\neq\vec{0}$ se cumple:

   $$t\vec{v}=\vec{0}\Rightarrow t\vec{v}=t\vec{0}\Rightarrow t\vec{v}-t\vec{0}=\vec{0}\Rightarrow$$
   $$\Rightarrow t(\vec{v}-\vec{0})=\vec{0}\Rightarrow t=0.$$

   Veamos la demostración de la condición suficiente.

   Si $t=0$, puede verse en el libro de texto la demostración de $t\cdot\vec{0}=\vec{0}$.

   Si $\vec{v}=\vec{0}$, también puede verse que $t\cdot\vec{0}=\vec{0}$.

3. La solución en cada caso es:

a) A es un subespacio vectorial al cumplirse:
$t(x_1, x_1, 0) + s(x_2, x_2, 0) = (tx_1 + sx_2, tx_1 + sx_2, 0) \in A.$

b) B también es un subespacio vectorial ya que:
$t(x_1, y_1, -x_1 - y_1) + s(x_2, y_2, -x_2 - y_2) = (tx_1 + sx_2, ty_1 + sy_2, -tx_1 - sx_2 - ty_1 - sy_2) \in B$

c) C es un subespacio vectorial al ser:
$t(x_1, 2x_1, 3x_1) + s(x_1, 2x_1, 3x_1) = (tx_1 + sx_2, 2(tx_1 + sx_2), 3(tx_1 + sx_2)) \in C.$

d) D no es subespacio vectorial al cumplirse que:
El vector (1, 2, 5) pertenece a D, lo mismo que (2, 1, 7);
pero la suma de ambos (1, 2, 5) + (2, 1, 7) = (3, 3, 12) no pertenece al cumplirse $x + y = 3 + 3 = 6 \neq 3.$

4. Las matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ que conmutan con la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ son de la forma $\begin{pmatrix} c+d & 0 \\ c & d \end{pmatrix}$ con $c, d \in \mathbb{R}$.

Sea el conjunto $M = \left\{ \begin{pmatrix} c+d & 0 \\ c & d \end{pmatrix}; c, d \in \mathbb{R} \right\}$.

Forma un subespacio vectorial al cumplirse:

$$\begin{pmatrix} c_1 + d_1 & 0 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_2 + d_2 & 0 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} c_1 + c_2 + d_1 + d_2 & 0 \\ c_1 + c_2 & d_1 + d_2 \end{pmatrix} \in M$$

$$t \cdot \begin{pmatrix} c_1 + d_1 & 0 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} tc_1 + td_1 & 0 \\ tc_1 & td_1 \end{pmatrix} \in M$$

5. El conjunto del enunciado es un subespacio vectorial ya que las reglas de derivación permiten afirmar que:

$$[p(x) + q(x)]' = p'(x) + q'(x)$$
$$[t \cdot p(x)]' = t \cdot p'(x)$$
$$[p(x) + q(x)]'' = p''(x) + q''(x)$$
$$[t \cdot p(x)]'' = t \cdot p''(x)$$

6. a) el vector u puede ser cualquier combinación lineal de v y w, por ejemplo, $v + w$, es decir: $u = v + w = (1,2,0) + (1,1,-1) = (2,3,-1)$.

   b) en este caso habrá que tomar un vector u que no sea combinación lineal de v y w, es decir, que el determinante formado por los tres sea distinto de cero.

   Por ejemplo $u = (2,3,1)$ ya que:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

7. Tiene que cumplirse para que sean linealmente independientes:

$$\begin{vmatrix} 1 & -6 & a \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow 4a + 20 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq -5.$$

   Para que sean linealmente dependientes:

$$\begin{vmatrix} 1 & -6 & a \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 4a + 20 = 0 \Leftrightarrow a = -5.$$

8. Se debe cumplir que el valor del determinante

$$\begin{vmatrix} x & 2 & 0 \\ x & 3x & 5 \\ 1 & x & 5 \end{vmatrix} \text{ sea nulo.}$$

   Sin embargo, $\begin{vmatrix} x & 2 & 0 \\ x & 3x & 5 \\ 1 & x & 5 \end{vmatrix} = 10x^2 - 10x + 10$ no se anula para ningún valor real de *x.*

   Por tanto, no existe ningún valor de x que haga que los vectores sean linealmente dependientes.

9. Si forman una base al ser linealmente independientes ya que:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -8.$$

Sean *a, b* y *c* las coordenadas del vector (1, 1, 1) respecto de la base dada. Se cumplirá:

$$(1, 1, 1) = a(1, 2, 3) + b(0, 2, 4) + c(0, 2, 0)$$

Operando y resolviendo el sistema resultante:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ 2a + 2b + 2c = 1 \\ 3a + 4b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1/2 \\ c = 0 \end{cases}$$

Las coordenadas son (1, ½, 0)

PÁGINA 103

■ 10. En el espacio vectorial real de los polinomios de grado menor o igual que 2 $\{\mathbb{P}_2(x), +, \cdot_{\mathbb{R}}\}$, estudia si los siguientes polinomios forman o no una base: $A(x) = x^2 + 1$; $B(x) = x^2 + x$; $C(x) = x + 1$. En caso afirmativo halla las coordenadas del polinomio $M(x) = x^2 - x + 2$ respecto a dicha base.

■ 11. Halla una base y la dimensión de los siguientes subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$:

$$S = \{(x, y, z) \mid x - 2z = 0; \quad x, y, z \in \mathbb{R}\}$$
$$T = \{(x, 0, -x) \mid x \in \mathbb{R}\}$$
$$E = \{(x, y, z) \mid x + y = 0; y + z = 0; x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

■ 12. Sea la aplicación:

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x_1, x_2) &\rightsquigarrow (x_1 + 2x_2, x_1 - 2x_2) \end{aligned}$$

Demuestra que es una aplicación lineal, halla sus ecuaciones y su matriz asociada.

■ 13. Halla las ecuaciones de la aplicación lineal $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por:

$$f(-1, 1, 0) = (-1, 0) \qquad f(0, 0, 1) = (1, -1) \qquad f(1, 3, -1) = (0, 1)$$

■ 14. Sea $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una aplicación lineal de matriz asociada $\begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Halla $f(3, 5, -7)$ y $f^{-1}(1, 1)$.

■ 15. Sea $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal tal que $f(e_1) = (2, 5, 0)$, $f(e_2) = (1, 1, 1)$ y $(3, 2, 1) \in Ker\, f$, siendo $\{e_1, e_2, e_3\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$. Halla $f(e_3)$, la matriz asociada a esta aplicación lineal, su núcleo y su imagen.

■ 16. Halla el núcleo y la imagen de la aplicación lineal $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $f(0, 1) = (1, 1, -2)$ y $f(-1, 1) = (2, -2, -4)$.

■ 17. Sea la aplicación lineal $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $f(x_1, x_2, x_3) = (3x_1, x_1 - x_2 - x_3, x_1 + 2x_2 + 2x_3)$. Halla el núcleo, la imagen y una base y la dimensión de estos.

■ 18. Dadas las aplicaciones lineales:

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x_1, x_2) &\rightsquigarrow (2x_1, x_1 - x_2) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} g: \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x_1, x_2) &\rightsquigarrow (x_1 + x_2, -x_1) \end{aligned}$$

Halla la aplicación compuesta $g \circ f$. ¿Esta aplicación es lineal? En caso afirmativo estudia qué relación existe entre su matriz asociada y las matrices asociadas a las aplicaciones lineales g y f.

■ 19. Estudia si es lineal la aplicación $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(x_1, x_2) \rightsquigarrow \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

En caso afirmativo halla su núcleo.

10. Consideramos a los polinomios x^2, x y 1 como la base canónica del espacio vectorial dado.

Los polinomios del enunciado tienen por coordenadas respecto a la base canónica:

$A(x) = x^2 + 1 = (1,0,1); B(x) = x^2 + x = (1,1,0)$ y $C(x) = x + 1 = (0,1,1)$.

Los vectores anteriores forman una base al cumplirse $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$.

Sean a, b y c las coordenadas de *M(x)* respecto a la base *{A(x), B(x), C(x)}*.

Se cumple: $(1,-1,2) = a(1,0,1) + b(1,1,0) + c(0,1,1)$.

Operando y resolviendo:

$$\begin{cases} a + b \qquad = 1 \\ \quad b + c = -1 \\ a + \quad c = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b \qquad = 1 \\ \quad b + c = -1 \\ \quad b - c = -1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + b \qquad = 1 \\ \quad b + c = -1 \\ \qquad 2c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \\ c = 0 \end{cases}$$

Observa que se cumple:

$$x^2 - x + 2 = 2(x^2 + 1) - (x^2 + x) + 0 \cdot (x + 1).$$

11. Los vectores de *S* pueden ponerse en la forma:

$$(2z, y, z) = y(0,1,0) + z(2,0,1)$$

Los vectores $(0,1,0)$ y $(2,0,1)$ forman una base de *S* y su dimensión es 2.

Al ser $(x, 0, -x) = x(1,0,-1)$ para los vectores de *T* podemos considerar el vector $(1,0,-1)$ como una base de *T* su dimensión será 1.

En el caso del subespacio *E* podemos escribir:

$$(x, y, z) = (-y, y, -y) = y(-1, 1, -1)$$

El vector $(-1,1,-1)$ constituye una base de *E* y su dimensión es 1.

12. Veamos que la aplicación f es lineal.

Consideremos los vectores $\vec{v}=(x_1,x_2)$ y $\vec{w}=(z_1,z_2)$ de $\mathbb{R}^2$. Se cumple:

$$\begin{aligned}&=(x_1+z_1+2(x_2+z_2),\ x_1+z_1-2(x_2+z_2))=\\&=(x_1+2x_2+z_1+2z_2,\ x_1-2x_2+z_1-2z_2)=\\&=(x_1+2x_2,\ x_1-2x_2)+(z_1+2z_2,\ z_1-2z_2)\end{aligned}$$

$f(x_1,x_2)+f(z_1,z_2)=(x_1+2x_2,x_1-2x_2)+(z_1+2z_2,z_1-2z_2)$.

Además se cumple:

$$f[t(x_1,\ x_2)]=f(tx_1,\ tx_2)=(tx_1+2tx_2,\ tx_1-2tx_2)$$

$$t\cdot f(x_1,\ x_2)=t(x_1+2x_2,\ x_1-2x_2)=(tx_1+2tx_2,\ tx_1-2tx_2).$$

Las ecuaciones de esta aplicación son:

$$\left.\begin{array}{l}y_1=x_1+2x_2\\y_2=x_1-2x_2\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$$

Su matriz asociada es $\begin{pmatrix}1&2\\1&-2\end{pmatrix}$.

13. Las ecuaciones de la aplicación lineal son de la forma:

$$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

Teniendo en cuenta las condiciones del enunciado:

$$f(-1,\ 1,\ 0)=(-1,\ 0)\Rightarrow\begin{cases}-a_{11}+a_{12}=-1\\-a_{21}+a_{22}=\ \ 0\end{cases}$$

$$f(0,\ 0,\ 1)=(1,\ -1)\Rightarrow\begin{cases}a_{13}=\ \ 1\\a_{23}=-1\end{cases}$$

$$f(1,\ 3,\ 1)=(0,\ 1)\Rightarrow\begin{cases}a_{11}+3a_{12}-a_{13}=0\\a_{21}+3a_{22}-a_{23}=1\end{cases}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones obtenemos:

$a_{11}=1;\quad a_{12}=0;\quad a_{13}=1;\quad a_{21}=0;\quad a_{22}=0$ y $a_{23}=-1$.

Las ecuaciones buscadas son:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = x_1 + x_3 \\ y_2 = -x_3 \end{cases}$$

La expresión de la aplicación es:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_3, -x_3)$$

14. Las ecuaciones de la aplicación lineal son:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Hallamos $f(3,5,-7)$:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Por tanto, $f(3,5,-7)=(29,-6)$.

Calculamos $f^{-1}(1,1)$:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_2 - 2x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema obtenemos:

$x_1 = t$; $x_2 = 3-4t$; $x_3 = 4-6t$ con $t \in \mathbb{R}$

Por tanto,

$f^{-1}(1,1) = \{(t, 3-4t, 4-6t) \mid t \in \mathbb{R}\}$

15. Expresamos el vector $e_3=(1,0,0)$ en combinación lineal de $e_1=(1,0,0), e_2=(0,1,0)$ y $e_3=(3,2,1)$ al formar estos una base y obtenemos:

$$e_3 = (0,\ 0,\ 1) = -3(1,\ 0,\ 0) - 2(0,\ 1,\ 0) + (3,\ 2,\ 1)$$

Calculamos $f(e_3)$ teniendo en cuenta que f es una aplicación lineal:

$$\begin{aligned} f(e_3) &= f[-3(1,\ 0,\ 0) - 2(0,\ 1,\ 0) + (3,\ 2,\ 1)] = \\ &= -3f(1,\ 0,\ 0) - 2f(0,\ 1,\ 0) + f(3,\ 2,\ 1) = \\ &= -3(2,\ 5,\ 0) - 2(1,\ 1,\ 1) + (0,\ 0,\ 0) = (-8,\ -17,\ -2). \end{aligned}$$

La matriz asociada de la aplicación *f* es:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -8 \\ 5 & 1 & -17 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

El nucleo de la aplicación lineal es:

$$Ker\, f = \{(x_1,\ x_2,\ x_3) \mid f(x_1,\ x_2,\ x_3) = (0,\ 0,\ 0)\}$$

Resolvemos el sistema y obtenemos:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 8x_3 = 0 \\ 5x_1 + x_2 - 17x_3 = 0 \\ x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 8x_3 \\ 5x_1 + x_2 = 17x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 3x_3 \\ x_2 = 2x_3 \end{cases}$$

Por tanto $Ker\, f = \{(x_1, x_1, x_1) \mid x_3 \in \mathbb{R}\} = \{3t, 2t, t\} \mid t \in \mathbb{R}$

Una base del nucleo es el vector (3, 2, 1) y la dimensión de *Ker f* es 1.
La imagen de la aplicación *f* es:

$$Im\, f = \{(y_1,\ y_2,\ y_3) \mid \exists\ (x_1,\ x_2,\ x_3);\ f(x_1,\ x_2,\ x_3) = (y_1,\ y_2,\ y_3)\}$$

A partir de las ecuaciones de la aplicación

$$\begin{cases} y_1 = 2x_1 + x_2 - 8x_3 \\ y_2 = 5x_1 + x_2 - 17x_3 \\ y_3 = x_2 - 2x_3 \end{cases}$$

Y eliminando x_1, x_2, x_3 obtenemos la ecuación $5y_1 - 2y_2 - 3y_3 = 0$

Por tanto :

$$Im\, f = \{(y_1,\ 5/2\, y_1 - 3/2\, y_3,\ y_3)\} = (2t,\ 5t - 3s,\ 2s) \mid t,\ s \in \mathbb{R}\}$$

Una base del subespacio $\mathrm{Im}\, f\ \{(2,5,0)\} = (2t, 5t-3s, 2s) \mid t, s \in \Re\}$ y su dimensión es 2.

16. las ecuaciones de la aplicación, en forma matricial son:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Las condiciones del enunciado nos conducen a:

$$\left.\begin{array}{l} f(0,1)=(1,1,-2) \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ f(-1,1)=(2,-2,-4) \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} a=-1, b=1 \\ c=\ 3, d=1 \\ e=\ 2,\ f=-2 \end{array}$$

Por tanto las ecuaciones de la aplicación son:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = -x_1 + x_2 \\ y_2 = 3x_1 + x_2 \\ y_3 = 2x_1 - 2x_2 \end{cases}$$

El nucleo de esta aplicación contiene a los vectores $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ que cumplan $f(x_1, x_2) = (0,0,0)$, es decir, los que cumplen:

$$\begin{cases} -x_1 + \ \ x_2 = 0 \\ 3x_1 + \ \ x_2 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

El nucleo de la aplicación es $Ker\ f = \{(0,0)\}$.

La imagen de esta aplicacion contiene a los vectores $(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ que cumplen:

Existe $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tal que $f(x_1, x_2) = (y_1, y_2, y_3)$.

Los vectores buscados cumplen:

$$\begin{cases} y_1 = -x_1 + x_2 \\ y_2 = 3x_1 + x_2 \\ y_3 = 2x_1 - 2x_2 \end{cases}$$

Eliminando x_1 y x_2 obtenemos: $2y_1 + y_3 = 0$.

Por tanto $Im\ f = \{(y_1, y_2, -2y_1)\} = \{(t, s, -2t) \mid t, s \in \mathbb{R}\}$

Una base del subespacio $Im\ f$ está formada por los vectores $\{(1, 0, -2), (0, 1, 0)\}$ y su dimensión es 2.

17. El nucleo de esta apicacion esta formado por los vectores $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ tales que:

$$\begin{cases} 3x_1 & = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 & = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -x_3 \end{cases}$$

Por tanto Ker f = $\{(0, -x_3, x_3)\} = \{(0, -t, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

Una base del nucleo esta formada por el vector $(0, -1, 1)$ y su dimensión es 1.

La imagen de *f* está formada por los vectores $(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ que cumplen:

$$\begin{cases} y_1 = 3x_1 \\ y_2 = x_1 - x_2 - x_3 \\ y_3 = x_1 + 2x_2 + 2x_3 \end{cases}$$

Eliminando x_1, x_2, x_3 obtenemos: $y_1 - 2y_2 - y_3 = 0$.

Por tanto *Im f* $= \{(2y_2 + y_3, y_2, y_3)\} = \{(2t + s, t, s) \mid t, s \in \mathbb{R}\}$.

Una base del subespacio imagen está formada por los vectores $\{(2, 1, 0), (1, 0, 1)\}$ y su dimensión es 2.

18. La aplicación compuesta $g \circ f$ tiene por expresión:

$(g \circ f)(x_1, x_2) = g[f(x_1, x_2)] = g(2x_1, x_1 - x_2) = (3x_1 - x_2, -2x_1)$

Puede comprobarse sin dificultad que la aplicación anterior es lineal. Las matrices asociadas a las aplicaciones *f* y *g* son, respectivamente:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matriz asociada a la aplicación compuesta $g \circ f$ es $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$.

Es fácil comprobar que:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

19. La expresión de la aplicación es $f(x_1, x_2) = 2x_1 - x_2$. La aplicación es lineal al cumplir:

$f((x_1, x_2) + (z_1, z_2)) = f(x_1 + z_1, x_2 + z_2) = 2x_1 + 2z_1 - x_2 - z_2$

$f(x_1, x_2) + f(z_1, z_2) = 2x_1 - x_2 + 2z_1 - z_2 = 2x_1 + 2z_1 - x_2 - z_2$

$f[t(x_1, x_2)] = f[(tx_1, tx_2)] = 2tx_1 - tx_2$

$t\,f(x_1, x_2) = t(2x_1 - x_2) = 2tx_1 - tx_2$

El núcleo lo forman los vectores $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ que cumplen:

$$f(x_1, x_2) = 0 \Leftrightarrow 2x_1 - x_2 = 0$$

Por tanto $Ker\ f = \{(x_1, 2x_1)\} = \{(t, 2t) \mid t \in \mathbb{R}\}$. El núcleo es un subespacio vectorial de dimensión 1.

PÁGINA 104

ACTIVIDADES FINALES

ACCESO A LA UNIVERSIDAD

20. Sea la aplicación lineal $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $f(\vec{e}_1) = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$; $f(\vec{e}_2) = 3\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3$; $f(\vec{e}_3) = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 - 3\vec{e}_3$, siendo $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$. Halla:

a) La matriz de esta aplicación lineal.

b) El núcleo y su dimensión.

c) La imagen y una base de la misma.

d) La imagen del vector $\vec{v} = \vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3$.

21. Prueba que el subconjunto T de $\mathbb{R}^3$ dado por $T = \{(x, y, z) \mid 2x - y - z = 0\}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$. Halla una base y su dimensión.

22. Consideremos la aplicación lineal $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $f(1, 2) = (-2, 1, 0)$; $f(1,0) = (6, -1, 2)$. Halla $f^{-1}(2, 7, -7)$.

23. Prueba que si los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$, y $\vec{w}$ son linealmente independientes también lo son los vectores $\vec{u}$, $\vec{u} + \vec{v}$, $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$.

24. Razona para qué valor o valores de a los vectores $(1, 1, 0)$, $(a, 1, 1)$ y $(1, a, 0)$ forman una base de $\mathbb{R}^3$.

25. En $\mathbb{R}^3$ tomamos el subconjunto de vectores $\{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 - x_2 + x_3 = 0\}$. ¿Es este subconjunto un subespacio de $\mathbb{R}^3$? En caso afirmativo halla una base y su dimensión.

26. Sea V el espacio vectorial de los polinomios de coeficientes reales y grado menor o igual que 3. Sean los polinomios:

$$P_1(x) = 1 - x \quad ; \quad P_2(x) = x^2 + x \quad ; \quad P_3(x) = 1 - x^2 \quad ; \quad P_4(x) = x + x^3$$

Prueba que estos polinomios constituyen una base de V. Determina las coordenadas del polinomio $P(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ en dicha base.

27. Sea W el espacio vectorial de los polinomios con coeficientes reales y grado menor o igual a 2. Sea f la aplicación:

$$f: W \longrightarrow W$$
$$P \rightsquigarrow P'$$

siendo P' el polinomio derivado del polinomio P. Demuestra que f es lineal y halla su núcleo.

28. Una aplicación g de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$ viene dada por $g(1, 0, 0) = (2, 1, 1)$, $g(0, 1, 0) = (3, 0, -1)$, y su núcleo está engendrado por el vector $(1, 2, -1)$. ¿Qué vectores de $\mathbb{R}^3$ coinciden con su imagen en esta aplicación?

29. Sean A y B dos subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ definidos de la siguiente forma:

$$A = \{(x, y, z) \mid x \cdot z = 3; \quad x, y, z \in \mathbb{R}\}$$
$$B = \{(x, y, z) \mid x = y^2; \quad x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

Estudia si son subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$.

20. La solución en cada caso es:

a) La matriz de la aplicación lineal es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

b) El núcleo de f esta formado por los vectores $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ que cumplen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 \quad - x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema, obtenemos: $\begin{cases} x_1 = 2x_3 \\ x_2 = -x_3 \end{cases}$

El núcleo es $Ker\, f = \{(2x_3, -x_3, x_3)\} = \{(2t, -t, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$

El vector $(2, -1, 1)$ constituye una base del nucleo y su dimensión es 1.

c) La imagen de f esta formada por los vectores $(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ que cumplen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = x_1 + 3x_2 + x_3 \\ y_2 = x_1 + x_2 - x_3 \\ y_3 = x_1 - x_2 - 3x_3 \end{cases}$$

Eliminando x_1, x_2, x_3, obtenemos: $y_1 - 2y_2 + y_3 = 0$.

La imagen es $\mathrm{Im}\, f = \{(2y_2 - y_3, y_2, y_3)\} = \{(2t - s, t, s) \mid t, s \in \mathbb{R}\}$

Los vectores $\{(2,1,0), (-1,0,1)\}$ forman una base de la imagen de f y su dimensión es 2.

d) La imagen del vector $\vec{v} = (1, -2, 4)$ es el vector:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ -9 \end{pmatrix}$$

21. Veamos que T es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$. Consideramos dos vectores cualesquiera de T y un numero real t cualquiera, es decir,

- $$\left.\begin{array}{l}(x, y, z) \in T \Leftrightarrow 2x - y - z = 0 \\ (x', y', z') \in T \Leftrightarrow 2x' - y' - z' = 0\end{array}\right\} \Leftrightarrow$$
  $$\Leftrightarrow (2x - y - z) + (2x' - y' - z') = 0 \Leftrightarrow$$
  $$\Leftrightarrow 2(x + x') - (y + y') - (z + z') = 0 \Leftrightarrow$$
  $$(x + x', y + y', z + z') \in T$$
- Al ser $t(2x - y - z) = 0 \Leftrightarrow 2tx - 2ty - 2tz = 0 \Leftrightarrow$
  $$\Leftrightarrow (tx, ty, tz) \in T$$

El subespacio T lo podemos escribir en la forma:

$$T = \{(x, y, 2x - y)\} = \{(t, s, 2t - s) \mid t, s \in \mathbb{R}\}$$

Un vector cualquiera de T puede expresarse como sigue:

$$(t, s, 2t - s) = t(1, 0, 2) + s(0, 1, -1)$$

Los vectores $(1, 0, 2)$ y $(0, 1, -1)$ forman una base de T y su dimensión es 2.

22. Determinamos la ecuación matricial de la aplicación f que es de la forma:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Imponiendo las condiciones del enunciado, obtenemos:

$$\left.\begin{array}{l} f(1,2) = (-2,1,0) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ \\ f(1,0) = (6,-1,2) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} a = 6, b = -4 \\ c = -1, d = 1 \\ e = 2, f = -1 \end{array}$$

Las ecuaciones de la aplicación *f* en forma matricial son:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Calculamos $f^{-1}(2,7,-7)$ y para ello resolvemos el sistema:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x_1 - 4x_2 = 2 \\ -x_1 + x_2 = 7 \\ 2x_1 - x_2 = -7 \end{cases}$$

El último sistema carece de solución, por tanto no existe ningún vector en $\Re^2$ cuya imagen mediante la aplicación f sea $(2,7,-7)$.

23. Consideramos la combinación lineal nula:

$$a\vec{u} + b(\vec{u} + \vec{v}) + c(\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}) = 0$$

Operando obtenemos:
$(a+b+c)\vec{u} + (b+c)\vec{v}\ c\vec{w} = 0$

Al ser los vectores *u*, *v* y *w* linealmente independientes:

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ \quad\; b + c = 0 \\ \qquad\;\; c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

Como los escalares *a*, *b* y *c* son nulos, los vectores, $\vec{u}, \vec{u} + \vec{v}$ y $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$ son linealmente independientes.

24. Calculamos el determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & a & 0 \end{vmatrix} = 1 - a.$$

Para $a \neq 1$ los vectores del enunciado forman una base de $\mathbb{R}^3$.

25. Es fácil ver que el subconjunto dado es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ (véase la actividad 27). El subespacio puede expresarse en la forma:

$$\{(x_2 - x_3, x_2, x_3)\} = \{(t - s, t, s) \mid t, s \in \mathbb{R}\}$$

Cualquier vector puede escribirse como combinación lineal de los vectores (1, 1, 0) y $(-1, 0, 1)$:

$$(t - s, t, s) = t(1, 1, 0) + s(-1, 0, 1)$$

Una base del subespacio la forman los vectores (1, 1, 0) y $(-1, 0, 1)$, la dimensión es 2.

26. Veamos que los polinomios $P_1(x), P_2(x), P_3(x)$ y $P_4(x)$ son linealmente independientes.

Formamos la combinación lineal nula:

$$a(1 - x) + b(x^2 + x) + c(1 - x^2) + d(x + x^3) = 0$$

Operamos:

$$dx^3 + (b - c)\, x^2 + (b + d - a)\, x + (a + c) = 0$$

Por el principio de identidad de polinomios:

$$\begin{cases} d = 0 \\ b - c = 0 \\ -a + b + d = 0 \\ a + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 0 \\ a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

Luego estos polinomios son linealmente independientes.

Veamos que forman sistema generador, es decir que cualquier polinomio de V de la forma $ax^3 + bx^2 + cx + d$ puede escribirse en combinación lineal de los polinomios dados:

$$\begin{cases} s = a \\ z - t = b \\ -y + z + s = c \\ y + t = d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s = a; \\ t = \dfrac{d - b + c - a}{2}; \end{cases}$$

$$y = \frac{b + d - c + a}{2}$$

$$z = \frac{b + d + c - a}{2}$$

Luego efectivamente los polinomios dados son base. El polinomio P(x) respecto a esta base es:

$$x^3 + x^2 + x + 1 = 1(1 - x) + 1(x^2 + x) + 0(1 - x^2) + 1(x + x^3)$$

Es decir las coordenadas (1, 1, 0, 1) respecto a la base $\{P_1, P_2, P_3, P_4\}$

27. La aplicación lineal f esta definida por $f(ax^2+bx+c)=2ax+b$. veamos que es lineal.

$$f[ax^2+bx+c)+(a'x^2+b'x+c')] =$$
$$= f[(a+a')\,x^2+(b+b')\,x+(c+c')] =$$
$$= 2(a+a')x+(b+b') = (2ax+b)+(2a'x+b').$$
$$f(ax^2+bx+c)+f(a'x^2+b'x+c') = (2ax+b)+(2a'x+b').$$
$$t\cdot f(ax^2+bx+c) = t\cdot(2ax+b) = 2atx+bt =$$
$$= f[t\cdot(ax^2+bx+c)].$$

El núcleo de f estará formado por los polinomios (ax^2+bx+c) cuya derivada sea nula, es decir:

$$f(ax^2+bx+c)=0 \Leftrightarrow 2ax+b=0 \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=0 \end{cases}$$

Los polinomios del nucleo son los polinomios de grado cero.

28. Calculamos la imagen por g del vector $\vec{e}_3 = (0,0,1)$. este vector puede expresarse:

$(0,0,1) = (1,0,0) + 2(0,1,0) - (1,2,-1)$.

La imagen del vector $(0,0,1)$ por la aplicación lineal g es:

$g(0,0,1) = g(1,0,0) + 2g(0,1,0) - g(1,2,-1) = (2,1,1) + 2(3,0,-1) - (0,0,0) = (8,1,-1)$

La ecuación de la aplicación lineal g en forma matricial es:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 8 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Los vectores (x_1, x_2, x_3) de $\mathbb{R}^3$ que coinciden con su imagen son los vectores que cumplen:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 8 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Operando y resolviendo el sistema resulstante, obtenemos:

$$\begin{cases} x_1 = 2x_1 + 3x_2 + 8x_3 \\ x_2 = x_1 + x_3 \\ x_3 = x_1 - x_2 - x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 8x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

Por tanto el único vector que coincide con su imagen en esta aplicación es el vector nulo $\vec{0} = (0,0,0)$