ÁLGEBRA EJERCICIOS DE SELECTIVIDAD
ANDALUCÍA - 2011

***Ejercicio 1*.-** (2011)

Considera las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & -1 & \lambda \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) ¿Hay algún valor de λ para el que A no tiene inversa?

(b) Para $\lambda = 1$, resuelve la ecuación matricial $A^{-1}XA = B$.

***Ejercicio 2*.-** (2011)

Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & t+1 & t-1 \\ -2t-1 & 0 & t+3 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

(a) Calcula el rango de A según los diferentes valores de t.

(b) Razona para qué valores de t el sistema homogéneo $AX = \mathbf{0}$ tiene más de una solución.

***Ejercicio 3*.-** (2011)

Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & -1 \\ 1 & \alpha & -1 \\ -1 & -1 & \alpha \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(a) Calcula el rango de A dependiendo de los valores de α.

(b) Para $\alpha = 2$, resuelve la ecuación matricial $AX = B$.

***Ejercicio 4*.-** (2011)

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ -\alpha & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

(a) Calcula los valores de α para los que la matriz inversa de A es $\dfrac{1}{12}A$.

(b) Para $\alpha = -3$, determina la matriz X que verifica la ecuación $A^tX = B$, siendo A^t la matriz traspuesta de A.

Ejercicio 5.- (2011)

Sean A y B dos matrices que verifican:

$$A+B=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad A-B=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Halla las matrices $(A+B)(A-B)$ y A^2-B^2.

(b) Resuelve la ecuación matricial $XA-XB-(A+B)^t=2I$, siendo I la matriz identidad de orden 2 y $(A+B)^t$ la matriz traspuesta de $A+B$.

Ejercicio 6.- (2011)

Sea la matriz

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & \lambda \\ -5 & \lambda & -5 \\ \lambda & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(a) Determina los valores de λ para los que la matriz $A-2I$ tiene inversa, siendo I la matriz identidad de orden 3.

(b) Para $\lambda=-2$, resuelve la ecuación matricial $AX=2X+I$.

Ejercicio 7.- (2011)

Considera el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & 2y & + & 4z & = & 4 \\ 2x & & & + & z & = & a \\ -3x & - & 3y & + & 3z & = & -3 \end{array}\right\}$$

(a) Discútelo según los valores del parámetro a.

(b) Resuélvelo cuando sea posible.

Ejercicio 8.- (2011)

Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

(a) Demuestra que $A^2+2A=I$ y que $A^{-1}=A+2I$, siendo I la matriz identidad de orden 2.

(b) Calcula la matriz X que verifica la ecuación $A^2+XA+5A=4I$.

Ejercicio 9.- (2011)

Sean A y B dos matrices cuadradas de orden 3 cuyos determinantes son $|A| = \dfrac{1}{2}$ y $|B| = -2$. Halla:

(a) $|A^3|$.

(b) $|A^{-1}|$.

(c) $|-2A|$.

(d) $|AB^t|$, siendo B^t la matriz traspuesta de B.

(e) El rango de B.

Ejercicio 10.- (2011)

Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

(a) Demuestra que se verifica la igualdad $A^3 = -I$, siendo I la matriz identidad de orden 3.

(b) Justifica que A es invertible y halla su inversa.

(c) Calcula razonadamente A^{100}.

Ejercicio 11.- (2011)

Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} -\lambda x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & \lambda y & + & z & = & 2 \\ \lambda x & + & y & + & z & = & 1 \end{array}\right\}$$

(a) Clasifica el sistema según los valores del parámetro λ.

(b) Resuelve el sistema para $\lambda = 0$.

Ejercicio 12.- (2011)

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} \lambda+1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

(a) Determina los valores de λ para los que la matriz $A^2 + 3A$ no tiene inversa.

(b) Para $\lambda = 0$, halla la matriz X que verifica la ecuación $AX + A = 2I$, siendo I la matriz identidad de orden 2.

Ejercicio 13.- (2012)

Considera las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Determina, si existe, la matriz X que verifica $AXB = C^t$, siendo C^t la matriz traspuesta de C.

Ejercicio 14.- (2012)

Dado el sistema de ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} kx & + & 2y & & & = & 3 \\ -x & & & + & 2kz & = & -1 \\ 3x & - & y & - & 7z & = & k+1 \end{array} \right.$$

(a) Estudia el sistema para los distintos valores del parámetro k.

(b) Resuélvelo para $k = 1$.

Ejercicio 15.- (2012)

Considera el sistema de ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{rcccrcl} x & + & (k+1)y & + & 2z & = & -1 \\ kx & + & y & + & z & = & 2 \\ x & - & 2y & - & z & = & k+1 \end{array} \right.$$

(a) Clasifícalo según los distintos valores de k.

(b) Resuélvelo para el caso $k = 2$.

Ejercicio 16.- (2012)

Sean $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ las funciones definidas por $f(x) = x^2 - 2x$ y $g(x) = -x^2 + 4x$ respectivamente.

(a) Halla los puntos de corte de sus gráficas y realiza un esbozo del recinto que limitan.

(b) Calcula el área de dicho recinto.

Ejercicio 17.- (2012)

Considera el siguiente sistema de ecuaciones con dos incógnitas

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} kx & + & 2y & = & 2 \\ 2x & + & ky & = & k \\ x & - & y & = & -1 \end{array} \right.$$

(a) Prueba que el sistema es compatible para cualquier valor del parámetro k.

(b) Especifica para qué valores del parámetro k es determinado y para cuáles indeterminado.

(c) Halla las soluciones en cada caso.

Ejercicio 18.- (2012)

Considera el sistema de ecuaciones con tres incógnitas

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & & & = & \lambda \\ & & 2\lambda y & + & \lambda z & = & \lambda \\ -x & - & y & + & \lambda z & = & 0 \end{array}\right.$$

(a) Clasifícalo según los distintos valores del parámetro λ.

(b) Resuélvelo para $\lambda = 0$ y $\lambda = -1$.

Ejercicio 19.- (2012)

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & k & 1 \end{pmatrix}$

(a) ¿Para qué valores del parámetro k no existe la inversa de la matriz A? Justifica la respuesta.

(b) Para $k = 0$, resuelve la ecuación matricial $(X + I) \cdot A = A^t$, donde I denota la matriz identidad y A^t la matriz traspuesta de A.

Ejercicio 20.- (2012)

Considera el sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & \lambda + 1 \\ & & 3y & + & 2z & = & 2\lambda + 3 \\ 3x & + & (\lambda - 1)y & + & z & = & \lambda \end{array}\right.$$

(a) Resuelve el sistema para $\lambda = 1$.

(b) Halla los valores de λ para los que el sistema tiene una única solución.

(c) ¿Existe algún valor de λ para el que el sistema admite la solución $\left(\frac{-1}{2},\ 0,\ \frac{1}{2} \right)$?

Ejercicio 21.- (2012)

Considera el sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & ky & + & 2z & = & k + 1 \\ x & + & 2y & + & kz & = & 3 \\ (k + 1)x & + & y & + & z & = & k + 2 \end{array}\right.$$

(a) Determina los valores de k para los que el sistema tiene más de una solución.

(b) ¿Existe algún valor de k para el cual el sistema no tiene solución?

(c) Resuelve el sistema para $k = 0$.

Ejercicio 22.- (2012)

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$, sea B la matriz que verifica que $AB = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$

(a) Comprueba que las matrices A y B poseen inversas.

(b) Resuelve la ecuación matricial $A^{-1}X - B = BA$.

Ejercicio 23.- (2012)

Un estudiante ha gastado 57 euros en una papelería por la compra de un libro, una calculadora y un estuche. Sabemos que el libro cuesta el doble que el total de la calculadora y el estuche juntos.

(a) ¿Es posible determinar de forma única el precio del libro? ¿Y el de la calculadora? Razona las respuestas.

(b) Si el precio del libro, la calculadora y el estuche hubieran sufrido un 50 %, un 20 % y un 25 % de descuento respectivamente, el estudiante habría pagado un total de 34 euros. Calcula el precio de cada artículo.

Ejercicio 24.- (2012)

Considera el sistema de ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & kz & = & 1 \\ 2x & + & ky & & & = & 1 \\ & & y & + & 2z & = & k \end{array} \right.$$

(a) Clasifica el sistema según los valores del parámetro k.

(b) Resuélvelo para $k = 1$.

(c) Resuélvelo para $k = -1$.