UNIDAD 3: **Aplicaciones de las derivadas**

1. CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO DE UNA FUNCIÓN

Estudiando el signo de la derivada primera podemos saber cuando una función es creciente o decreciente. Esto se llama también el estudio de la **monotonía** de la función.

Propiedad:

- Si $f'(x) > 0$, entonces la función f es estrictamente creciente en x

- Si $f'(x) < 0$, entonces la función f es estrictamente decreciente en x

Ejemplo 1: Estudiar la monotonía (intervalos de crecimiento y decrecimiento) de la función $f(x) = -x^2 + 5x - 1$

Lo primero es fijarnos que su dominio es todo $\mathbb{R}$, $Dom(f) = \mathbb{R}$

Calculamos su función derivada, que resulta $f'(x) = -2x + 5$. Que como vemos también tiene sentido en todo $\mathbb{R}$, o lo que es lo mismo, su **dominio de derivabilidad** es todo $\mathbb{R}$

Vamos a estudiar ahora el signo de f'. Primero veamos dónde se anula.

$f'(x) = 0 \rightarrow -2x + 5 = 0 \rightarrow x = 5/2$. Con este punto construimos una tabla de signos para f'

	$(-\infty, \frac{5}{2})$	$(\frac{5}{2}, +\infty)$
$f'(x) = -2x + 5$	+	-
	↑	↓

Los signos los obtenemos de igual forma a como hacíamos en los dominios (sustituyendo por un valor del intervalo)

De la tabla de signos podemos concluir que:

f es estrictamente creciente en $(-\infty, \frac{5}{2})$

f es estrictamente decreciente en $(\frac{5}{2}, +\infty)$

Ejemplo 2: Estudiar la monotonía de $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$

Tenemos que $Dom(f) = \mathbb{R} - \{1\}$

Calculamos la función derivada, $f'(x) = \dfrac{2x\cdot(x-1) - x^2\cdot 1}{(x-1)^2} = \dfrac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$. Como vemos, la función es derivable (ó tiene por dominio de derivabilidad) en $\mathbb{R} - \{1\}$

Vemos ahora dónde se anulan el numerador y el denominador, para poder construir la tabla de signos de la derivada.

Del numerador: $x^2 - 2x = 0 \rightarrow x\cdot(x-2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$

Del denominador: $(x-1)^2 = 0 \rightarrow x - 1 = 0 \rightarrow x = 1$

Ya pasamos a construir la tabla de signos:

	$(-\infty,0)$	$(0,1)$	$(1,2)$	$(2,+\infty)$
$x^2 - 2x$	+	-	-	+
	↑	↓	↓	↑

NOTA: Como podéis observar en la tabla no hemos puesto el factor del numerador pues al ser $(x-1)^2$, éste siempre será positivo demos el valor que le demos y por tanto no influye en el signo de f'. Si el exponente hubiese sido impar, entonces si teníamos que haberlo puesto.

Podemos concluir que:

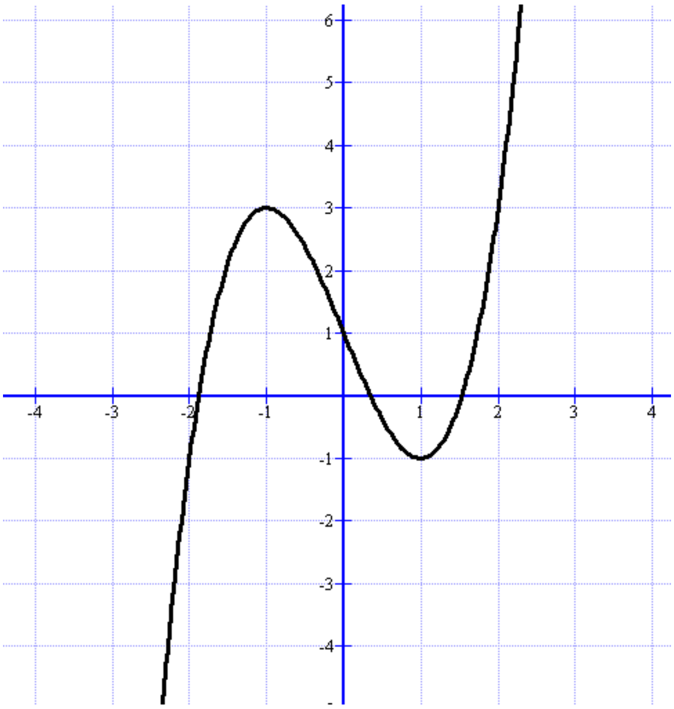
f es creciente en $(-\infty,0)$
f es decreciente en $(0,1)$
f es decreciente en $(1,2)$
f es creciente en $(2,+\infty)$

2. EXTREMOS RELATIVOS

Una función $y=f(x)$ tiene un **máximo relativo** en un punto de abscisa x_0 (o en el punto $(x_0, f(x_0))$) si $f(x_0)$ es el mayor valor que alcanza f en un entorno de x_0.

Una función $y=f(x)$ tiene un **mínimo relativo** en un punto de abscisa x_0 (o en el punto $(x_0, f(x_0))$) si $f(x_0)$ es el menor valor que alcanza f en un entorno de x_0.

Ejemplo 3: Tenemos la función $y=f(x)$ cuya gráfica es la siguiente:

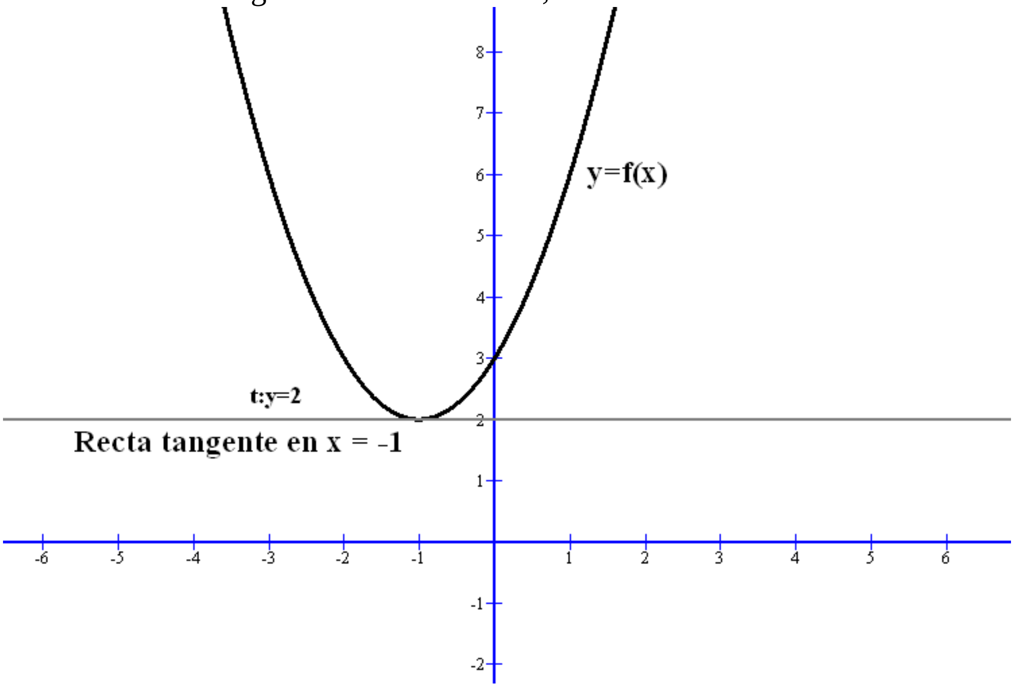


Podemos observar que en el punto de abscisa $x_0=-1$, la función tiene un máximo relativo, que como vemos no es absoluto. También se suele decir que la función tiene un máximo relativo en (-1,3).

Podemos observar que en el punto de abscisa $x_0=1$, la función tiene un mínimo relativo, que como vemos no es absoluto. También se suele decir que la función tiene un mínimo relativo en (1,-1).

¿Cómo calcular los extremos relativos de una función dada por su criterio o fórmula? Si observamos la gráfica del ejemplo anterior nos damos cuenta que las rectas tangentes tanto en el máximo como en el mínimo relativo son horizontales. Esto quiere decir que su pendiente es 0, o sea, $f'(-1)=0$ y $f'(1)=0$

Efectivamente, en los extremos relativos, si una función es derivable, su derivada tiene que valer 0.
Lo vemos gráficamente de nuevo, con otra función diferente:



Como se ve la recta tangente en el mínimo tiene por pendiente 0 (es una recta horizontal), y como sabemos la pendiente de la recta tangente en el punto coincide con el valor de la derivada. Por tanto, $f'(-1)=0$

Propiedad: Si una función $y=f(x)$ tiene un extremo relativo en un punto de abscisa x_0 y es derivable en x_0, entonces $f'(x_0)=0$

Vamos a tener dos maneras de calcular los extremos relativos aplicando la propiedad anterior:

1ª forma: Usando el estudio del crecimiento y decrecimiento.

Si vemos que a la izquierda de un punto x_0 (que sea del dominio de la función y derivable en él) la función es creciente $\uparrow$ y a la derecha es decreciente $\downarrow$, podemos concluir que la función presenta un máximo relativo en el punto de abscisa x_0.

Si vemos que a la izquierda de un punto x_0 (que sea del dominio de la función y derivable en él) la función es decreciente $\downarrow$ y a la derecha es creciente $\uparrow$, podemos concluir que la función presenta un mínimo relativo en el punto de abscisa x_0.

Este método es cómodo de usar pues normalmente nos van a pedir en el problema que estudiemos la monotonía, y de paso podemos calcular los extremos relativos.

Ejemplo 4: Dada la función $f(x)=x^3-3x+1$, calcular sus extremos relativos
Como vemos se trata de una función polinómica, y por tanto, su dominio es todo $\mathbb{R}$ y es derivable en todo $\mathbb{R}$.
Calculamos la función derivada $f'(x)=3x^2-3$, y vemos dónde se anula (estos puntos serán los posibles extremos y además nos determinan los intervalos de monotonía)

$$f'(x)=3x^2-3=0 \rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=1 \end{cases}$$

Ahora hacemos nuestra tabla de signos de la derivada

	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,+\infty)$
$3x^2-3$	+	-	+
	↑	↓	↑

En $x_0=-1$, la función pasa de ser creciente a decreciente, luego presenta un máximo relativo (también se dice que la función presenta un máximo relativo en (-1,3))

En $x_0=1$, la función pasa de ser decreciente a creciente, luego presenta un mínimo relativo (también se dice que la función presenta un mínimo relativo en (1,-1))

<u>*NOTA*</u>: Esta función es la correspondiente a la gráfica del ejemplo 3. Podéis comprobar como el estudio analítico corresponde con el gráfico.

<u>*2ª forma*</u>: <u>Usando el criterio de la derivada segunda</u>.

Aquí se utiliza la siguiente propiedad:
<u>**Propiedad**</u>: Dada una función $y=f(x)$ tal que $f'(x_0)=0$, entonces si existe la derivada 2ª en x_0 $(\exists f''(x_0))$

a) Si $f''(x_0)>0$, entonces f tiene un mínimo relativo en x_0
b) Si $f''(x_0)<0$, entonces f tiene un máximo relativo en x_0
c) Si $f''(x_0)=0$, entonces no podemos afirmar nada.

<u>**Ejemplo 5**</u>: Dada la función $f(x)=x^3-3x+1$, calcular sus extremos relativos. (es igual al ejemplo 4)

Vemos donde se anula su derivada 1ª: $f'(x)=3x^2-3=0 \rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=1 \end{cases}$

Calculamos la derivada 2ª: $f''(x)=6x$
Y por último vemos el valor de la derivada 2ª en los puntos donde se anula la derivada 1ª

$f''(-1)=6\cdot(-1)=-6<0 \rightarrow$ En $x_0=-1$, la función tiene un máximo relativo

$f''(1)=6\cdot 1=6> \rightarrow$ En $x_0=1$, la función tiene un mínimo relativo

Como observamos este método es mucho más corto que el anterior en este caso, pero si nos piden también estudiar la monotonía, entonces es más conveniente usar la 1ª forma. Muchas veces la derivada 2ª es compleja de calcular, por eso quizás sea más conveniente la 1ª forma, pero se deja a gusto del alumno su uso.

<u>**Ejemplo 6**</u>: Estudiar los extremos relativos de $f(x)=\dfrac{x^2}{x-1}$. (es la misma función del ejemplo 2)

Vamos a hacerlo de las dos formas.
<u>*1ª forma*</u>: <u>Usando el estudio del crecimiento y decrecimiento</u>.
Por el Ejemplo 2, ya tenemos el estudio de la monotonía. Ponemos aquí sólo la tabla de signos de la derivada 1ª

	$(-\infty,0)$	$(0,1)$	$(1,2)$	$(2,+\infty)$
x^2-2x	+	-	-	+
	↑	↓	↓	↑

De aquí deducimos que:

En $x_0=0$, la función tiene un máximo relativo

En $x_0 = 2$, la función tiene un mínimo relativo

¡**OJO**! En $x_0 = 1$, la función no puede tener extremos pues no es del dominio
<u>*2ª forma*</u>: <u>Usando el criterio de la derivada segunda</u>.

Por el ejemplo 2 tenemos ya calculada la derivada: $f'(x) = \dfrac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$ y dónde se anula que es en los puntos $\begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$. Derivamos otra vez para la derivada 2ª:

$$f''(x) = \frac{(2x-2)\cdot(x-1)^2 - (x^2-2x)\cdot 2\cdot(x-1)}{(x-1)^4} = \text{(sacamos facto común } x-1\text{)}$$
$$= \frac{(x-1)\cdot[(2x-2)\cdot(x-1) - (x^2-2x)\cdot 2]}{(x-1)^4} = \text{(simplificamos y operamos)} = \frac{2}{(x-1)^3}$$

Vemos ahora los valores que toma la segunda derivada en $\begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$

$f''(0) = \dfrac{2}{(0-1)^3} = \dfrac{2}{-1} = -2 < 0 \rightarrow$ En $x_0 = 0$, la función tiene un máximo relativo

$f''(2) = \dfrac{2}{(2-1)^3} = \dfrac{2}{1} = 2 > 0 \rightarrow$ En $x_0 = 2$, la función tiene un mínimo relativo

<u>**NOTA**</u>: El criterio de la derivada segunda admite una generalización para cuando las derivadas sucesivas van dando 0 en el punto. Lo que nos dice (a grosso modo) es que si la función tiene derivadas nulas en x_0 , si el índice de la primera derivada sucesiva no nula es par entonces si $f^{(n)}(x_0) < 0$ es un máximo relativo y si $f^{(n)}(x_0) > 0$ es un mínimo relativo.

3. <u>OPTIMIZACIÓN DE FUNCIONES. PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN</u>

Se trata aquí de problemas (parecidos a los de ecuaciones) donde tenemos que calcular el máximo o mínimo (optimización) de una función con unos condicionantes o ligaduras. Lo fundamental en este tipo de problemas es entender el enunciado y elegir bien las variables, así como las relaciones o ligaduras entre ellas.
Veamos con ejemplos como afrontarlos:

<u>**Ejemplo 7**</u>: Encontrar dos números cuya suma sea 120 y tales que el producto de uno de ellos por el cuadrado del otro sea máximo

Tenemos dos variables (los dos números) que notamos por x e y

La relación entre ellos o ligadura es: $x + y = 120$

La función a optimizar (a maximizar en este caso) es : $f(x, y) = x\cdot y^2$. Como vemos esta función tiene dos variables, pero la ligadura nos permitirá hacer una sustitución y dejar una sola.
De la relación tenemos que $y = 120 - x$, y sustituimos en la función, que nos queda sólo con la x:
$f(x) = x\cdot(120 - x)^2 \rightarrow$Operamos $f(x) = x\cdot(14400 - 240x + x^2) \rightarrow f(x) = 14400x - 240x^2 + x^3$
Derivamos: $f'(x) = 14400 - 480x + 3x^2$ e igualamos a 0 para calcular sus extremos, resolviendo una ecuación de 2º grado:

$14400 - 480x + 3x^2 = 0 \rightarrow x^2 - 160x + 4800 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 120 \\ x = 40 \end{cases}$. Hay dos posibles soluciones. Veamos cuál es el máximo. Lo vamos a hacer por el criterio de la 2ª derivada. $f''(x) = -480 + 6x$

$f''(120) = -480 + 6 \cdot 120 = 240 > 0 \rightarrow$ x = 120 es un mínimo relativo y no nos interesa

$f''(40) = -480 + 6 \cdot 40 = -240 < 0 \rightarrow$ x = 40 es un máximo relativo y éste es el adecuado.

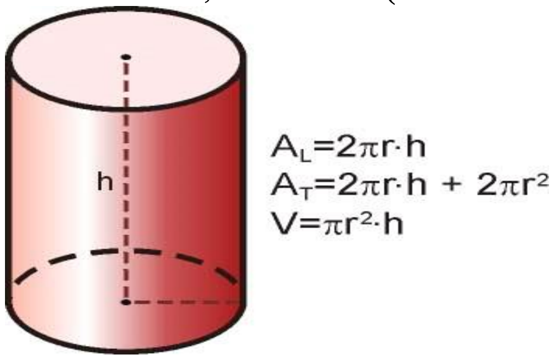
Calculamos y sustituyendo: y = 120 – 40 = 80

La solución entonces es x = 40 e y = 80

NOTA: Si en lugar de usar la x hubiésemos trabajado con la y, la resolución de la ecuación de 2º grado es mucho más simple

Ejemplo 8: Se desea construir un depósito cilíndrico de 10 m^3, abierto por arriba. Sabiendo que el material de la base es 5 veces más caro que el de las paredes, hallar las dimensiones que limitan el coste de material.

En la imagen tenemos las fórmulas del área lateral, el área total (con las dos tapas) y el volumen de un cilindro



Tenemos dos variables r y h, ambas en la unidad metro (m).

La ligazón viene dada por el volumen: $\pi \cdot r^2 \cdot h = 10$

Dado que el problema no especifica el coste por m^2 de la base y paredes, podemos suponer, sin perder rigurosidad, que él de las paredes es 1 €/m^2, y por tanto el de la base será 5 €/m^2. Así, la función coste podemos ponerla como sigue:

$C(r,h) = 2\pi \cdot r \cdot h \cdot 1 + \pi \cdot r^2 \cdot 5$ (coste de las paredes más el coste de la base). Ordenamos un poco y nos queda: $C(r,h) = 2\pi \cdot r \cdot h + 5\pi \cdot r^2$

De la ligadura despejamos una de las variables, en este caso la h (con la r nos salen raíces cuadradas y puede que nos lo complique): $h = \frac{10}{\pi \cdot r^2}$. Sustituimos en la función coste y nos queda sólo con r

$C(r) = 2\pi \cdot r \cdot \frac{10}{\pi \cdot r^2} + 5\pi \cdot r^2 \rightarrow C(r) = \frac{20}{r} + 5\pi \cdot r^2$.

Derivamos $C'(r) = \frac{-20}{r^2} + 10\pi \cdot r$. Igualamos a 0: $\frac{-20}{r^2} + 10\pi \cdot r = 0 \rightarrow \frac{-20 + 10\pi \cdot r^3}{r^2} = 0 \rightarrow -20 + 10\pi \cdot r^3 = 0$

$\rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{2}{\pi}}$ que será el posible extremo relativo.

Hacemos la 2ª derivada:

$C''(r) = \frac{40}{r^3} + 10\pi$ y sustituimos: $C''(\sqrt[3]{\frac{2}{\pi}}) = \frac{20}{\pi} + 10\pi > 0$. Luego es un mínimo.

Así las dimensiones del cilindro serán:

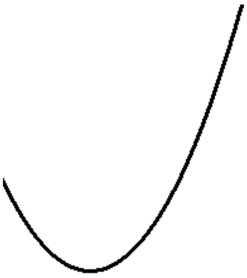
Radio de la base: $r = \sqrt[3]{\frac{2}{\pi}} \approx 0'86\,\text{m}$

Altura: $h=\dfrac{10}{\pi\left(\sqrt[3]{\dfrac{2}{\pi}}\right)^2}\approx 4'30\,\text{m}$

4. <u>CONCAVIDAD O CURVATURA DE UNA FUNCIÓN</u>

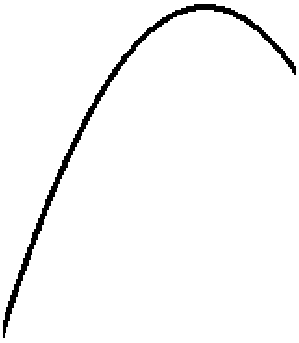
No vamos a entrar en profundidad en el significado de cóncavo o convexo en una función, sólo mediante unas gráficas veremos su significado.

Una función es **<u>cónvexa</u>** en un intervalo si su gráfica en ese intervalo es similar al siguiente dibujo



Algunos libros lo llaman también como cóncava hacia las y positivas. Nosotros diremos sólo convexa.

Una función es **<u>cóncava</u>** en un intervalo si su gráfica en ese intervalo es similar al siguiente dibujo



Algunos libros lo llaman también como cóncava hacia las y negativas. Nosotros diremos sólo cóncava

Estudiar la curvatura de una función es ver dónde es cóncava ó convexa.
La caracterización de dónde una función es cóncava o convexa viene dada por el signo de la derivada segunda.

<u>Propiedad</u>:

Si $f''<0$, entonces la función es cóncava

Si $f''>0$, entonces la función es convexa

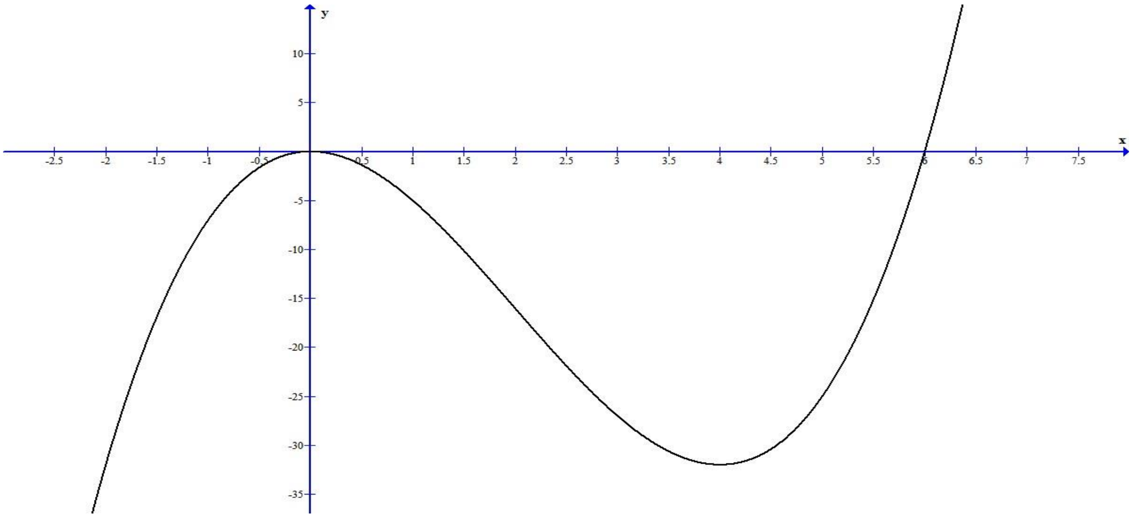
<u>Ejemplo 9</u>: Estudiar la curvatura de $f(x)=x^3-6x^2$
Como es una función polinómica, su dominio es todo R, y es derivable infinitamente en todo R

Derivamos hasta la 2ª derivada: $f'(x)=3x^2-12x \rightarrow f''(x)=6x-12$
Vamos a estudiar el signo de f''. La igualamos a 0: $6x-12=0 \rightarrow x=2$
Construimos la tabla de signos:

	$(-\infty,2)$	$(2,+\infty)$
$6x-12$	-	+
	Cóncava $\cap$	Convexa $\cup$

En $(-\infty,2)$, la función es cóncava.
En $(2,+\infty)$, la función es convexa.

La gráfica de esta función es como sigue, para que veáis que coincide con el estudio realizado



En x = 2, se produce el cambio de concavidad o curvatura

NOTA: Como siempre, se puede decir que en (2, -16) es donde se produce el cambio de curvatura, en lugar de decir x = 2.

5. PUNTOS DE INFLEXIÓN

Definición: Diremos que una función y = f(x) tiene un punto de inflexión en x_0, cuando la función cambia de curvatura en ese punto.
Si pasa de convexa a cóncava, se llama punto de inflexión convexo-cóncavo.
Si pasa de cóncava a convexa, se llama punto de inflexión cóncavo-convexo.

Para calcularlos hay también dos formas, aunque la más fácil es estudiando la curvatura como hemos hecho en el punto anterior. La otra forma se basa en la siguiente propiedad:
Propiedad: Si la función y = f(x) tiene derivada segunda nula en un punto x_0, y su derivada tercera es distinta de 0, entonces x_0 es un punto de inflexión.

NOTA IMPORTANTE: Si x_0 es un punto de inflexión y $y = f(x)$ es derivable dos veces en x_0, entonces $f''(x_0) = 0$

Ejemplo 10: Calcular los puntos de inflexión de $f(x) = x^3 - 6x^2$
Esta función es la del ejemplo 9, aprovechamos lo ya hecho:

	$(-\infty,2)$	$(2,+\infty)$
$6x-12$	-	+
	Cóncava $\cap$	Convexa $\cup$

Como vemos, en $x_0 = 2$, la función tiene un punto de inflexión cóncavo-convexo.

Vamos a hacerlo de la otra forma.

Hacemos la 2 ª derivad e igualamos a 0, resultando los posibles puntos de inflexión.
$f''(x) = 6x - 12 \rightarrow 6x - 12 = 0 \rightarrow x = 2$
Hacemos la 3ª derivada y vemos el valor en $x = 2$
$f'''(x) = 6 \rightarrow f'''(2) = 6 \neq 0 \rightarrow$ En $x = 2$, hay un punto de inflexión. De esta forma se obtiene menos información de la curva (no sabemos si es convexo-cóncavo o viceversa), pero puede resultar a veces más rápido.

Ejemplo 11: Estudiar la curvatura y los puntos de inflexión de la función $y = \dfrac{2}{x-3}$

Siempre primero tengamos en cuenta el dominio: $Dom(y) = \mathbb{R} - \{3\}$. En su dominio esta función es derivable pues es racional y no se anula el denominador

Calculamos la 2 ª derivada: $y' = \dfrac{-2}{(x-3)^2} \rightarrow y'' = \dfrac{4}{(x-3)^3}$. Veamos dónde se anula que serán los posibles puntos de inflexión y nos permite hacer la tabla de signos: $y'' = \dfrac{4}{(x-3)^3} = 0 \rightarrow 4 = 0$ No hay solución.

Hacemos la tabla de signos y ¡¡OJO!!! hay que tener en cuenta también los que anulan al denominador que no son del dominio.

	$(-\infty,3)$	$(3,+\infty)$
$\dfrac{4}{(x-3)^3}$	-	+
	Cóncava $\cap$	Convexa $\cup$

Podemos concluir que:
En $(-\infty,3)$, la función es cóncava.
En $(3,+\infty)$, la función es convexa.
Y no tiene puntos de inflexión, pues en x = 3 no tiene sentido pues no es del dominio.

6. REGLA DE L'Hôpital

Esta regla dice así:
Sean f y g dos funciones continuas que verifican las siguientes hipótesis:

- $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$ (o $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \pm\infty$)
- En un cierto entorno reducido de x_0, se tiene que $g(x) \neq 0$
- Existe el $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

Entonces se tiene que $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

Esta regla es válida siendo x_0 cualquier nº real, $+\infty$ o $-\infty$

Además la Regla de L'Hôpital se puede aplicar recursivamente, es decir, de manera reiterada, hasta que lleguemos a la obtención del límite.

También sirve para resolver indeterminaciones del tipo $0\cdot\infty$ que se pueden transformar en $\frac{0}{0}$ o en $\frac{\infty}{\infty}$

Ejemplo 12: Calcular los siguientes límites

a) $\lim_{x\to 2}\frac{2x^3-6x^2+8}{x^3+x^2-16x+20}$ Si sustituimos nos resulta una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$

Ya sabemos resolverla aplicando la descomposición en factores mediante Ruffini, pero aquí vamos a aplicar la Regla de L'Hôpital.

$\lim_{x\to 2}\frac{2x^3-6x^2+8}{x^3+x^2-16x+20}=\lim_{x\to 2}\frac{6x^2-12x}{3x^2+2x-16}$ Derivando en el numerador y en el denominador como dice la regla. Nuevamente sustituimos y nos queda $\frac{6\cdot 2^2-12\cdot 2}{3\cdot 2^2+2\cdot 2-16}=\frac{0}{0}$, que vuelve a ser indeterminación. Volvemos a aplicar la Regla de L'Hôpital.

$\lim_{x\to 2}\frac{6x^2-12x}{3x^2+2x-16}=\lim_{x\to 2}\frac{12x-12}{6x+2}=\frac{12}{14}=\frac{6}{7}$. Recomendación: Comprobar este límite aplicando Ruffini

b) $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{x^2}$ Al sustituir por 0 nos resulta $\frac{\ln(\cos 0)}{0^2}=\frac{\ln 1}{0}=\frac{0}{0}$. Aplicamos la Regla de L'Hôpital

$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-senx/\cos x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{-senx}{2x\cos x}$, que al sustituir resulta $\frac{0}{0}$, y volvemos a aplicar la Regla de L'Hôpital

$$\lim_{x\to 0}\frac{-senx}{2x\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\cos x}{2[\cos x-xsenx]}=\frac{-\cos 0}{2[\cos 0-0\cdot sen0]}=\frac{-1}{2}$$

c) $\lim_{x\to 1^+}(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1})=$ En este caso sale una indeterminación $(+\infty)-(+\infty)$ No podemos aplicar la regla aún. Restamos las fracciones para dejar una solamente:

$\lim_{x\to 1^+}(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1})=\lim_{x\to 1^+}\frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x}$ Y ahora si resulta indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$

Aplicamos la Regla de L'Hôpital: $\lim_{x\to 1^+}(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1})=\lim_{x\to 1^+}\frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x}=\lim_{x\to 1^+}\frac{1-\frac{1}{x}}{\ln x+\frac{x-1}{x}}$

Volvemos a operar para simplificar la expresión obtenida

$\lim_{x\to 1^+}\frac{1-\frac{1}{x}}{\ln x+\frac{x-1}{x}}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\frac{x-1}{x}}{\frac{x\ln x+x-1}{x}}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x-1}{x\ln x+x-1}$ Que vuelve a ser $\frac{0}{0}$ Volvemos a aplicar la Regla de L'Hôpital

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x-1}{x\ln x + x - 1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{\ln x + x\cdot\frac{1}{x} + 1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{\ln x + 1 + 1} = \frac{1}{2}$$

d) $\lim_{x\to +\infty} x\cdot e^{1-x^2}$ Al sustituir nos da $+\infty\cdot 0$, que es indeterminación. Para resolverla nos llevamos uno de los factores, la x ó la exponencial, al denominador. Tenemos dos opciones:

$\lim_{x\to +\infty} x\cdot e^{1-x^2} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x}{e^{-(1-x^2)}}$ que nos da indeterminación $\frac{+\infty}{+\infty}$

ó

$\lim_{x\to +\infty} x\cdot e^{1-x^2} = \lim_{x\to +\infty} \frac{e^{1-x^2}}{\frac{1}{x}}$ que nos da indeterminación $\frac{0}{0}$

Es fundamental elegir aquella que al derivar se convierta en otra más simple.

Si elegimos y aplicamos la Regla de L'Hôpital a la 2ª

$\lim_{x\to +\infty} x\cdot e^{1-x^2} = \lim_{x\to +\infty} \frac{e^{1-x^2}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{e^{1-x^2}\cdot(-2x)}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to +\infty} 2x^3 e^{1-x^2}$ y nos ha salido otro límite más complejo que el del principio, y no hemos avanzado nada.

Con la primera opción:

$$\lim_{x\to +\infty} x\cdot e^{1-x^2} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x}{e^{-(1-x^2)}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x}{e^{x^2-1}} = (\text{aplicamos L'Hôpital}) = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{e^{x^2-1}\cdot 2x} = \frac{1}{+\infty} = 0$$