

UNIDAD 12: Productos vectorial y mixto. Aplicaciones.

1. PRODUCTO VECTORIAL DE DOS VECTORES LIBRES

Definición: El producto vectorial de dos vectores libres \vec{v} y \vec{w} , que se nota por $\vec{v} \times \vec{w}$, se define como:

- Si $\vec{v} = \vec{0}$ ó $\vec{w} = \vec{0}$ ó \vec{v} y \vec{w} son proporcionales, entonces $\vec{v} \times \vec{w} = \vec{0}$

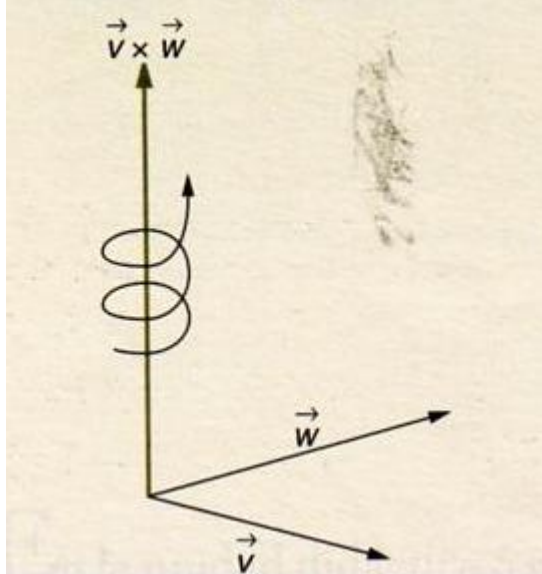
- En caso contrario, vectores no nulos e independientes, $\vec{v} \times \vec{w}$ es otro vector que verifica:

$$- \left| \vec{v} \times \vec{w} \right| = \left| \vec{v} \right| \cdot \left| \vec{w} \right| \cdot \left| \text{sen} \left(\overset{\wedge}{\vec{v}, \vec{w}} \right) \right|$$

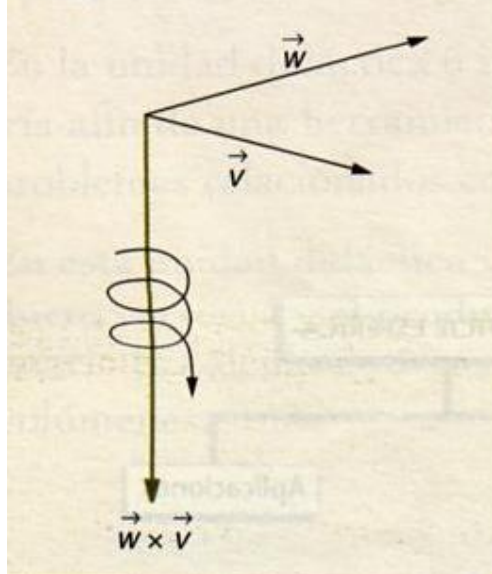
- Su dirección es la recta perpendicular a los dos vectores, \vec{v} y \vec{w}

- Su sentido resulta de aplicar la regla del sacacorchos

• Positiva o dextrógira



• Negativa o levógira



Propiedades:

1: El producto vectorial es anticonmutativo: $\vec{v} \times \vec{w} = -\vec{w} \times \vec{v}$

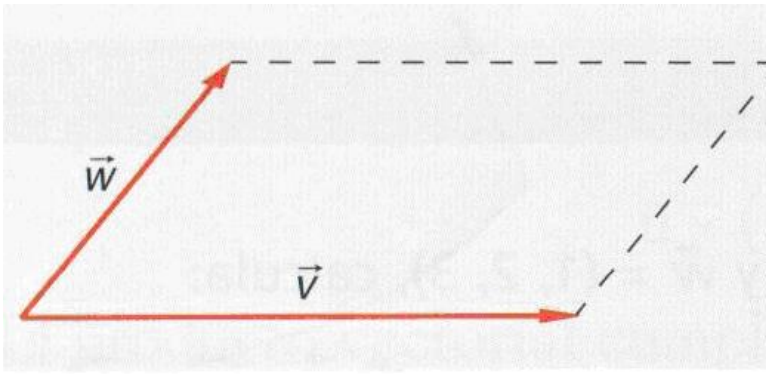
2: El producto vectorial es distributivo respecto de la suma de vectores: $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$

3: $(t\vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times (t\vec{v}) = t(\vec{u} \times \vec{v}) \quad \forall t \in \mathbb{R}$

Interpretación geométrica del producto vectorial

El módulo del producto vectorial de dos vectores libres coincide con el área del paralelogramo que tiene por

lados dichos vectores: Área del paralelogramo = $\left| \vec{v} \times \vec{w} \right|$



Expresión analítica del producto vectorial

Dados dos vectores libres $\vec{v} = (a_1, b_1, c_1)$ y $\vec{w} = (a_2, b_2, c_2)$, se tiene que el vector producto vectorial se obtiene

de efectuar el siguiente determinante: $\vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$

2. APLICACIONES DEL PRODUCTO VECTORIAL

Vector director de una recta

Dada una recta en ecuaciones implícitas $r \equiv \begin{cases} Ax + By + Cz = D \\ A'x + B'y + C'z = D' \end{cases}$, sabemos pasar a paramétricas y así obtener

el vector director. Ahora tenemos otro método para calcular el vector director usando el producto vectorial de los dos vectores normales de los dos planos que determinan la recta y es aplicando la siguiente fórmula:

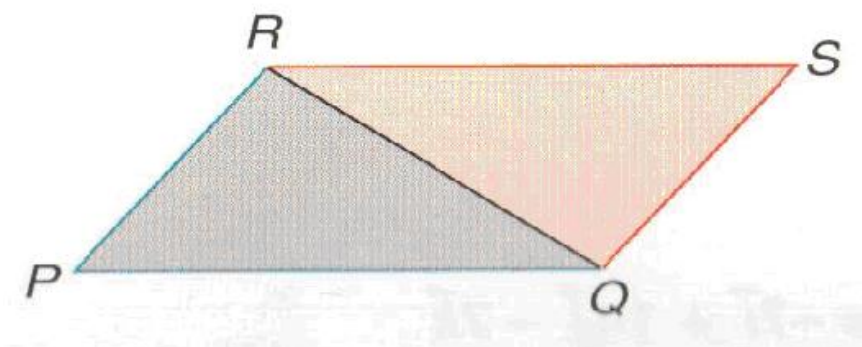
$$\vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A & B & C \\ A' & B' & C' \end{vmatrix}$$

Área de un paralelogramo

Como ya vimos en el apartado anterior tenemos que: Área del paralelogramo = $|\vec{v} \times \vec{w}|$

Área de un triángulo

El paralelogramo anterior si lo dividimos en dos triángulos por una de sus diagonales, tenemos que el área del triángulo definido por los vectores $\vec{v} = \vec{PQ}$ y $\vec{w} = \vec{PR}$ es: Área del triángulo = $\frac{1}{2} |\vec{v} \times \vec{w}|$



3. DISTANCIA DE UN PUNTO A UNA RECTA

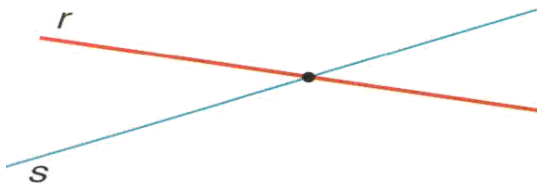
Dado un punto P y una recta r de la que tenemos un punto por donde pasa A y un vector director \vec{v} , se tiene

que:
$$d(P,r) = \frac{|\vec{v} \times \vec{AP}|}{|\vec{v}|}$$

4. DISTANCIA ENTRE RECTAS

Rectas que se cortan o son coincidentes

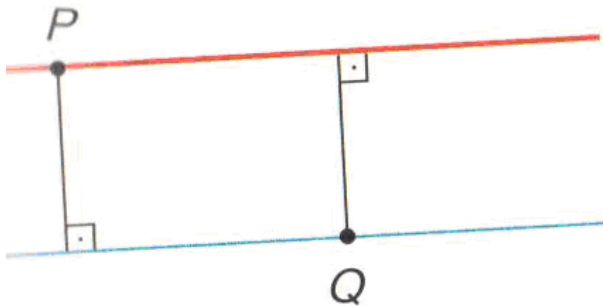
Su distancia es 0: $d(r,s) = 0$



Rectas paralelas

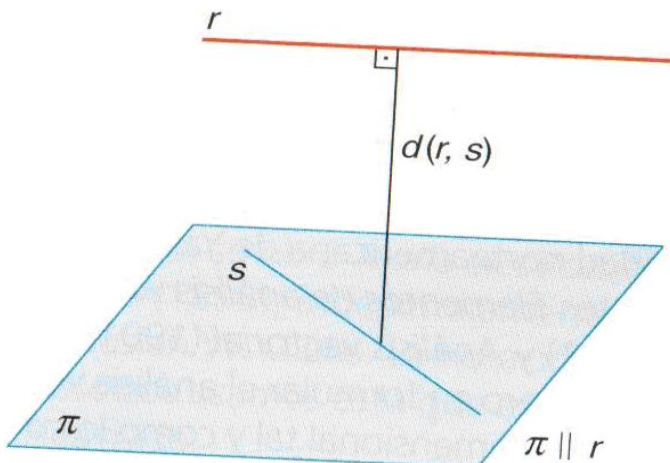
Dadas dos rectas r y s que sean paralelas, para calcular la distancia entre ellas se toma un punto de una cualquiera de ellas y se calcula la distancia de ese punto a la otra

$$d(r,s) = d(P,s) = d(Q,r)$$



Rectas que se cruzan

Calculamos el plano π que contiene a una de las rectas s y es paralelo a la otra recta r . La distancia entre las dos rectas es la distancia de un punto P de la recta r al plano π .



5. PRODUCTO MIXTO DE VECTORES LIBRES

Definición: El producto mixto de tres vectores libres \vec{u} , \vec{v} y \vec{w} , que designaremos por $\left[\begin{matrix} \vec{u} & \vec{v} & \vec{w} \end{matrix} \right]$, se obtiene operando consecutivamente los productos escalar y vectorial

$$\left[\begin{matrix} \vec{u} & \vec{v} & \vec{w} \end{matrix} \right] = \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$$

Propiedades

1- El producto mixto cambia de signo si se permutan dos vectores entre si:

$$\left[\begin{matrix} \vec{u} & \vec{v} & \vec{w} \end{matrix} \right] = - \left[\begin{matrix} \vec{v} & \vec{u} & \vec{w} \end{matrix} \right] = - \left[\begin{matrix} \vec{u} & \vec{w} & \vec{v} \end{matrix} \right] = - \left[\begin{matrix} \vec{w} & \vec{v} & \vec{u} \end{matrix} \right]$$

2: Se tiene que:

$$\left[\begin{matrix} \vec{u} + \vec{u}' & \vec{v} & \vec{w} \end{matrix} \right] = \left[\begin{matrix} \vec{u} & \vec{v} & \vec{w} \end{matrix} \right] + \left[\begin{matrix} \vec{u}' & \vec{v} & \vec{w} \end{matrix} \right]$$

3: Se tiene que:

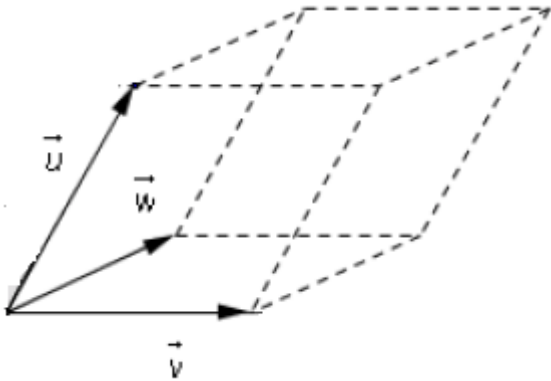
$$\left[\begin{matrix} t \cdot \vec{u} & \vec{v} & \vec{w} \end{matrix} \right] = \left[\begin{matrix} \vec{u} & t \cdot \vec{v} & \vec{w} \end{matrix} \right] = \left[\begin{matrix} \vec{u} & \vec{v} & t \cdot \vec{w} \end{matrix} \right] = t \cdot \left[\begin{matrix} \vec{u} & \vec{v} & \vec{w} \end{matrix} \right]$$

4: El producto mixto es nulo si y sólo si los tres vectores son linealmente dependientes

Interpretación geométrica del producto mixto

El valor absoluto del producto mixto de tres vectores es el volumen del paralelepípedo que tiene por aristas los

tres vectores: Volumen del paralelepípedo = $\left| \left[\begin{matrix} \vec{u} & \vec{v} & \vec{w} \end{matrix} \right] \right|$



Expresión analítica del producto mixto

Dados tres vectores libres $\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)$, $\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)$ y $\vec{w} = (a_3, b_3, c_3)$, se tiene que el vector producto

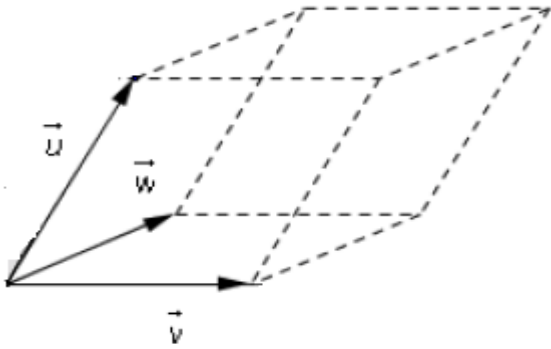
mixto se obtiene de efectuar el siguiente determinante: $\left[\begin{matrix} \vec{u} & \vec{v} & \vec{w} \end{matrix} \right] = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

6. APLICACIONES DEL PRODUCTO MIXTO

Volumen del paralelepípedo

Como hemos visto en el punto anterior, en la interpretación geométrica del producto mixto, el valor absoluto del producto mixto de tres vectores es igual al volumen del paralelepípedo que determinan:

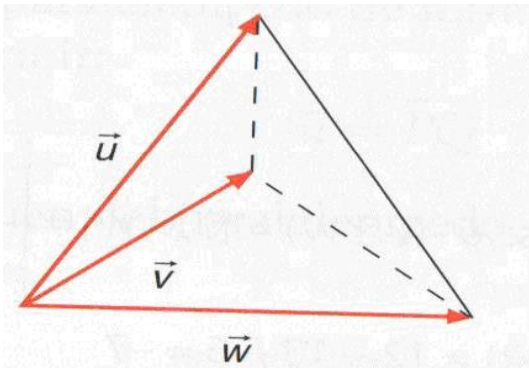
Volumen del paralelepípedo = $\left| \left[\begin{matrix} \vec{u} & \vec{v} & \vec{w} \end{matrix} \right] \right|$



Volumen del tetraedro

El volumen del tetraedro determinado por los vectores \vec{u} , \vec{v} y \vec{w} es igual a:

$$\text{Volumen del tetraedro} = \frac{1}{6} \left[\begin{array}{ccc} \vec{u} & \vec{v} & \vec{w} \\ u & v & w \end{array} \right]$$



7. DISTANCIA ENTRE DOS RECTAS QUE SE CRUZAN

Supongamos que tenemos dos rectas que se cruzan, cada una determinada por un punto por donde pasa y un

vector director: $r \equiv \begin{Bmatrix} Q \\ \vec{v}_r \end{Bmatrix}$ $s \equiv \begin{Bmatrix} P \\ \vec{v}_s \end{Bmatrix}$, entonces la distancia entre ellas se puede obtener por la

fórmula:
$$d(r, s) = \frac{\left| \begin{array}{ccc} \vec{v}_r & \vec{v}_s & PQ \\ v_r & v_s & PQ \end{array} \right|}{\left| \vec{v}_r \times \vec{v}_s \right|}$$

8. RECTA PERPENDICULAR COMÚN A OTRAS DOS

Se trata de calcular una recta que se apoya en otras dos y es perpendicular a ambas. Supongamos las dos rectas dadas por un punto por donde pasan y su vector director:

$$r \equiv \begin{Bmatrix} Q \\ \vec{v}_r \end{Bmatrix} \quad s \equiv \begin{Bmatrix} P \\ \vec{v}_s \end{Bmatrix}$$

El procedimiento es el siguiente:

- Calculamos un vector perpendicular a ambos vectores directores: $\vec{w} = \vec{v}_r \times \vec{v}_s$
- Calculamos el plano π_1 que contiene a la recta r y al vector anterior $\vec{w} = \vec{v}_r \times \vec{v}_s$
- Calculamos el plano π_2 que contiene a la recta s y al vector anterior $\vec{w} = \vec{v}_r \times \vec{v}_s$
- La recta pedida es la intersección de los planos π_1 y π_2