

UNIDAD 11: Geometría euclídea. Producto escalar

1. PRODUCTO ESCALAR DE DOS VECTORES LIBRES

Definición: Se llama producto escalar de los vectores \vec{u} y \vec{v} , y se nota por $\vec{u} \cdot \vec{v}$ al n° real que se obtiene de la siguiente forma:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \left| \vec{u} \right| \left| \vec{v} \right| \cos \left(\widehat{\vec{u}, \vec{v}} \right), \text{ es decir, el producto de los módulos por el coseno}$$

del ángulo que forman dichos vectores.

Propiedades del producto escalar:

1: El producto escalar de un vector consigo mismo coincide con el cuadrado de su módulo

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = \left| \vec{u} \right|^2 \geq 0$$

2: El producto escalar es conmutativo

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$$

3: El producto escalar es distributivo respecto a la suma de vectores

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$$

4: Se cumple que para cualquier n° real λ que:

$$\left(\lambda \vec{u} \right) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \left(\lambda \vec{v} \right) = \lambda \left(\vec{u} \cdot \vec{v} \right)$$

5: $\vec{u} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$

6: Desigualdad de Cauchy-Schwarz

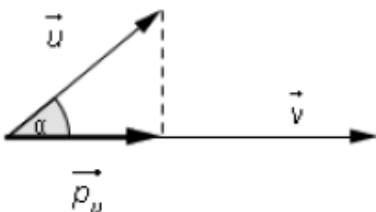
$$\left| \vec{u} \cdot \vec{v} \right| \leq \left| \vec{u} \right| \left| \vec{v} \right|$$

7: Desigualdad de Minkowski

$$\left| \vec{u} + \vec{v} \right| \leq \left| \vec{u} \right| + \left| \vec{v} \right|$$

Proyección ortogonal de un vector sobre otro:

Consideremos dos vectores \vec{u} y \vec{v} que forman entre sí un ángulo α . Tenemos el vector proyección ortogonal de \vec{u} sobre \vec{v} , \vec{P}_u , como se aprecia en el dibujo:



Podemos calcular el módulo de \vec{p}_u , aplicando la definición de coseno de α al triángulo de la figura:

$$\boxed{\left| \vec{p}_u \right| = \left| \vec{u} \right| \cdot |\cos \alpha|}$$

Ahora bien, por la definición de producto escalar tenemos: $\vec{u} \cdot \vec{v} = \left| \vec{u} \right| \left| \vec{v} \right| \cos \alpha \rightarrow |\cos \alpha| = \frac{\left| \vec{u} \cdot \vec{v} \right|}{\left| \vec{u} \right| \left| \vec{v} \right|}$, sustituyendo en

la expresión anterior, nos queda: $\left| \vec{p}_u \right| = \left| \vec{u} \right| \cdot \frac{\left| \vec{u} \cdot \vec{v} \right|}{\left| \vec{u} \right| \left| \vec{v} \right|} \rightarrow \boxed{\left| \vec{p}_u \right| = \frac{\left| \vec{u} \cdot \vec{v} \right|}{\left| \vec{v} \right|}}$

Expresión analítica del producto escalar

Considerando la base canónica $B_c = \left\{ \vec{i} = (1,0,0), \vec{j} = (0,1,0), \vec{k} = (0,0,1) \right\}$ y es fácil ver que los productos escalares entre ellos son:

$$\begin{aligned} \vec{i} \cdot \vec{i} &= 1 & \vec{i} \cdot \vec{j} &= \vec{j} \cdot \vec{i} = 0 \\ \vec{j} \cdot \vec{j} &= 1 & \vec{i} \cdot \vec{k} &= \vec{k} \cdot \vec{i} = 0 \\ \vec{k} \cdot \vec{k} &= 1 & \vec{j} \cdot \vec{k} &= \vec{k} \cdot \vec{j} = 0 \end{aligned}$$

Si tenemos dos vectores $\vec{u} = (a,b,c) = a \cdot \vec{i} + b \cdot \vec{j} + c \cdot \vec{k}$ y $\vec{v} = (a',b',c') = a' \cdot \vec{i} + b' \cdot \vec{j} + c' \cdot \vec{k}$, entonces:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \left(a \cdot \vec{i} + b \cdot \vec{j} + c \cdot \vec{k} \right) \cdot \left(a' \cdot \vec{i} + b' \cdot \vec{j} + c' \cdot \vec{k} \right) = \text{aplicamos la propiedades del producto escalar}$$

$$a \cdot a' \cdot \vec{i} \cdot \vec{i} + a \cdot b' \cdot \vec{i} \cdot \vec{j} + a \cdot c' \cdot \vec{i} \cdot \vec{k} + b \cdot a' \cdot \vec{j} \cdot \vec{i} + b \cdot b' \cdot \vec{j} \cdot \vec{j} + b \cdot c' \cdot \vec{j} \cdot \vec{k} + c \cdot a' \cdot \vec{k} \cdot \vec{i} + c \cdot b' \cdot \vec{k} \cdot \vec{j} + c \cdot c' \cdot \vec{k} \cdot \vec{k} = a \cdot a' + b \cdot b' + c \cdot c'$$

Por tanto,

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = a \cdot a' + b \cdot b' + c \cdot c'}$$

Ejemplo: Dados los vectores $\vec{u} = (2,-1,0)$ y $\vec{v} = (-2,-1,5)$, entonces $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \cdot (-2) + (-1) \cdot (-1) + 0 \cdot 5 = -3$

2. APLICACIONES DEL PRODUCTO ESCALAR

a: Módulo de un vector libre:

$$\text{Si } \vec{u} = (a,b,c) = a \cdot \vec{i} + b \cdot \vec{j} + c \cdot \vec{k} \rightarrow \boxed{\left| \vec{u} \right| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

b: Vectores unitarios de la misma dirección que uno dado:

Si $\vec{u} = (a,b,c)$, podemos obtener dos vectores unitarios y en la misma dirección que él, obviamente de sentido opuesto. Estos son:

$$\vec{u}_1 = \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right)$$

$$\vec{u}_2 = \left(\frac{-a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \frac{-b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \frac{-c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right)$$

c: Ángulo entre dos vectores

Si tenemos dos vectores $\vec{u} = (a, b, c)$ y $\vec{v} = (a', b', c')$, entonces el ángulo entre ellos:

$$\cos \left(\widehat{u, v} \right) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| |\vec{v}|} \rightarrow \cos \left(\widehat{u, v} \right) = \frac{a \cdot a' + b \cdot b' + c \cdot c'}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}}$$

d: Vectores ortogonales (perpendiculares entre si)

Dos vectores $\vec{u} = (a, b, c)$ y $\vec{v} = (a', b', c')$ son ortogonales y se nota $\vec{u} \perp \vec{v}$, si y sólo si su producto escalar es 0, $\vec{u} \cdot \vec{v} = a \cdot a' + b \cdot b' + c \cdot c' = 0$

e: Vector normal a un plano

Como ya sabemos del tema anterior, dado un plano en forma implícita, $\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$, el vector normal a ese plano es $\vec{n} = (A, B, C)$

3. ÁNGULOS ENTRE ELEMENTOS DEL ESPACIO

a: Ángulo entre dos rectas

Vamos a partir de que de las dos rectas podemos conocer sus vectores directores y también, como es obvio, un punto por donde pasan. Así, sean las rectas:

$$r \equiv \begin{cases} \text{Pasa por } P(x_1, y_1, z_1) \\ \text{Vector director: } \vec{u} = (a, b, c) \end{cases} \quad s \equiv \begin{cases} \text{Pasa por } Q(x_2, y_2, z_2) \\ \text{Vector director: } \vec{v} = (a', b', c') \end{cases}$$

El ángulo que forman las rectas es el mismo que el que forman sus vectores directores, es decir:

$$\cos \left(\widehat{r, s} \right) = \cos \left(\widehat{u, v} \right) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| |\vec{v}|} = \frac{a \cdot a' + b \cdot b' + c \cdot c'}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}}$$

A partir de esta expresión deducimos que:

$$1) r \perp s \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

$$2) r \parallel s \Leftrightarrow \vec{u} \parallel \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} = t \cdot \vec{v}, \text{ es decir, los vectores directores son proporcionales}$$

b: Ángulo entre dos planos

Dos planos forman dos ángulos, α y $180^\circ - \alpha$, nosotros siempre nos vamos a quedar con aquél que sea agudo. Además el ángulo que forman dos planos va a venir dado por el ángulo que forman sus vectores normales, pero teniendo en cuenta que el ángulo será agudo.

Sean dos planos π_1 y π_2 , con vectores normales respectivos, \vec{n}_1 y \vec{n}_2 , entonces:

$$\cos \left(\widehat{\pi_1, \pi_2} \right) = \left| \cos \left(\widehat{n_1, n_2} \right) \right| = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} = \frac{|A \cdot A' + B \cdot B' + C \cdot C'|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}}$$

Así tenemos que:

$$1) \pi_1 \perp \pi_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$$

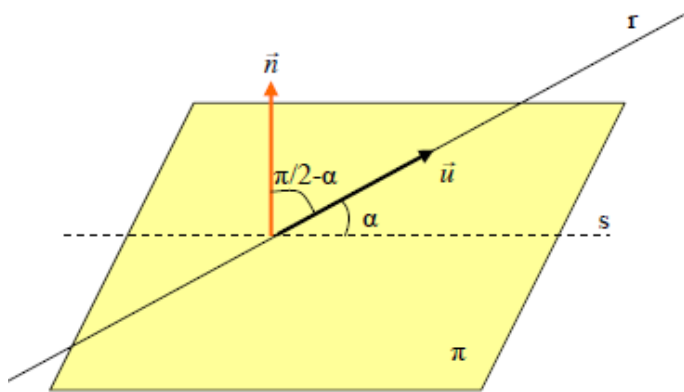
$$2) \pi_1 \parallel \pi_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 = t \cdot \vec{n}_2 \text{ (es decir, los vectores normales son proporcionales)}$$

c: Ángulo entre recta y plano

Vamos a calcular este ángulo en función del vector director de la recta y del vector normal del plano. Por tanto sea una recta r de vector director $\vec{u} = (a, b, c)$ y un plano π cuyo vector normal es $\vec{n} = (A, B, C)$. Como vemos en el dibujo el ángulo α es el pedido. Y el ángulo $\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ es el ángulo que forma la recta con el vector

normal. Como además α y $\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ son complementarios, tenemos que:

$$\operatorname{sen}\left(\widehat{r, \pi}\right) = \cos\left(\widehat{\vec{u}, \vec{n}}\right) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{n}}{\|\vec{u}\| \|\vec{n}\|} = \frac{a \cdot A + b \cdot B + c \cdot C}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$



A partir de esta expresión es fácil ver que:

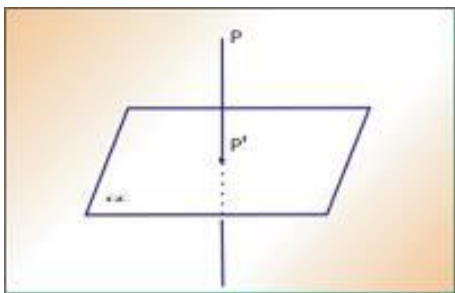
$$1) r \parallel \pi \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{n} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{n} = 0$$

$$2) r \perp \pi \Leftrightarrow \vec{u} \parallel \vec{n} \Leftrightarrow \vec{u} = t \cdot \vec{n} \text{ (es decir, el vector director de la recta y el normal del plano son proporcionales)}$$

4. **PROYECCIONES**

a: Proyección de un punto sobre un plano

Dado un punto P y un plano π como el de la figura, se trata de conocer la proyección ortogonal de P sobre π , P'

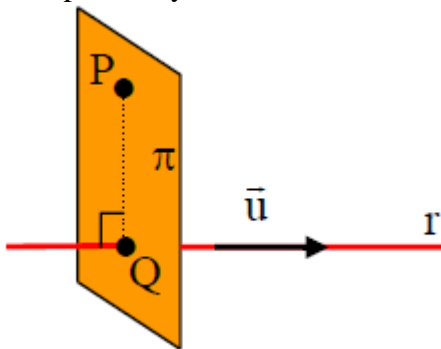


El procedimiento analítico es el siguiente:

- Hallamos la recta r que pasa por P y es perpendicular al plano π , es decir, su vector director es el normal del plano
- El punto P' es la intersección de la recta hallada y el plano π

b: Proyección de un punto sobre una recta

Dado un punto P y una recta r como en la figura se trata de conocer la proyección ortogonal de P sobre r , Q.

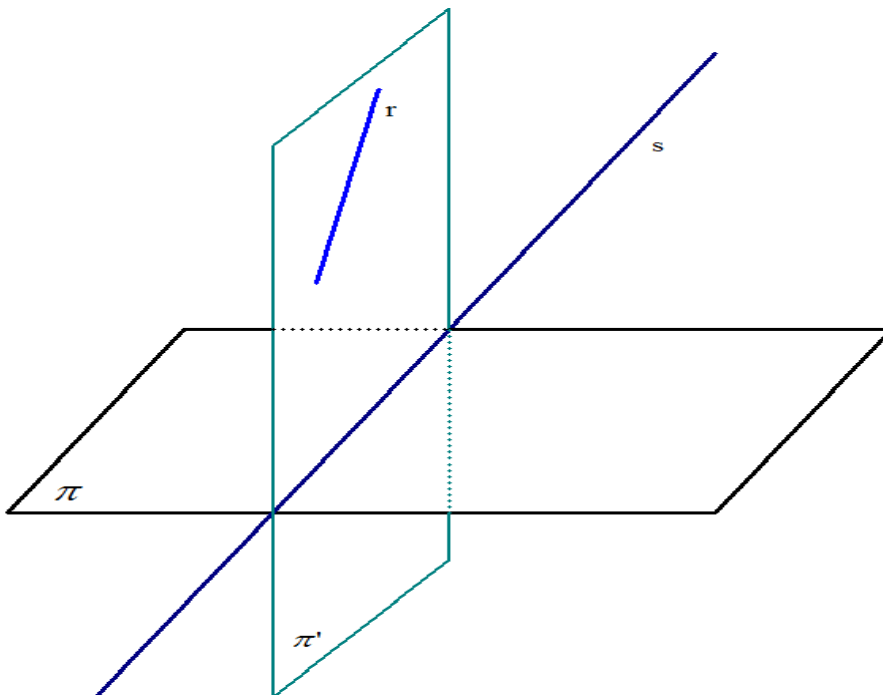


El procedimiento analítico es el siguiente:

- Construimos el plano π que pasa por P y es perpendicular a r (el vector director de la recta, \vec{u} , es el vector normal del plano)
- El punto Q pedido es la intersección del plano π hallado y la recta dada r

b: Proyección de una recta sobre un plano

Dada una recta r y un plano π , se trata de proyectar ortogonalmente la recta sobre el plano, dando como resultado la recta s

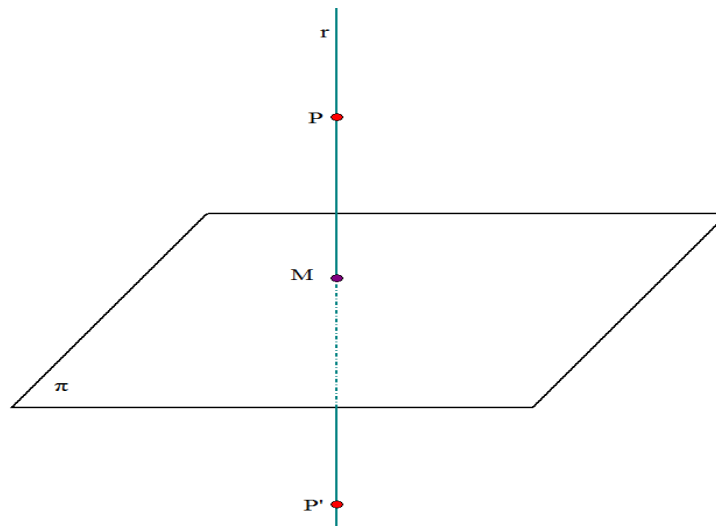


El procedimiento analítico es el siguiente:

- Hallamos el plano π' que contiene a r y es perpendicular a π (un punto de π' es cualquier punto de r y sus vectores directores serán el director de r y el normal de π)
- La recta proyección s es la intersección de los planos π y π'

5. ELEMENTOS SIMÉTRICOS

a: Simétrico de un punto respecto de un plano



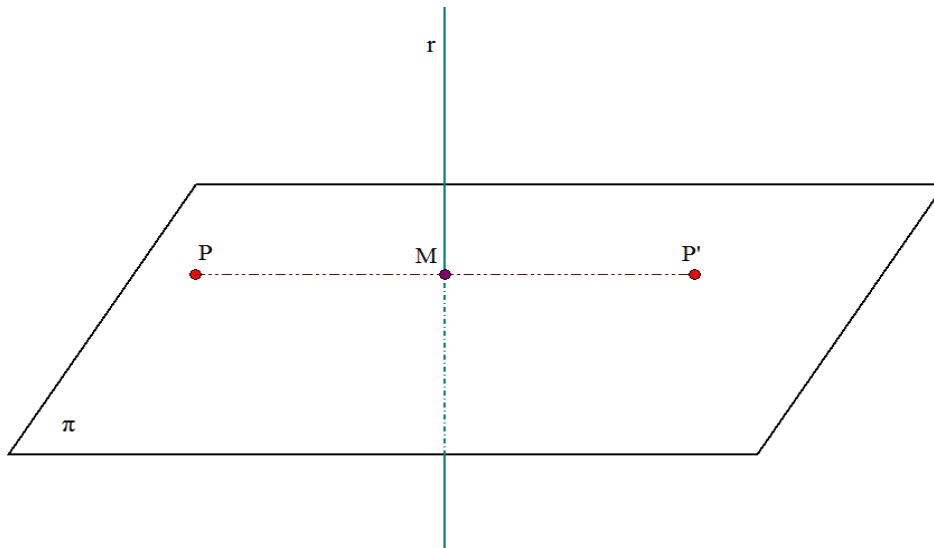
Como vemos en el dibujo, nos dan un punto P y un plano π , y nos piden calcular el simétrico de P respecto de π . El proceso es el siguiente:

- Calculamos la recta r que pasa por P y es perpendicular a π (el vector normal de π es el vector director de r)
- Intersectamos la recta r con el plano π para obtener el punto M
- Calculamos P' usando que M es el punto medio del segmento $\overline{PP'}$

b: Simétrico de un punto respecto de una recta

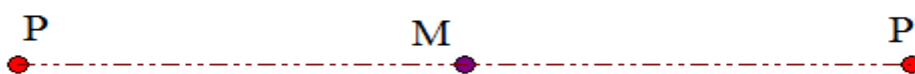
Nos dan como datos un punto P y una recta r, y nos piden calcular P'. El procedimiento es el siguiente:

- Calculamos el plano π que contiene a P y es perpendicular a r (el vector director de la recta r es el normal del plano π)
- Intersectamos el plano π y la recta r para obtener el punto M
- Calculamos P' usando que M es el punto medio del segmento $\overline{PP'}$



c: Simétrico de un punto respecto de otro punto

- Este caso es bastante fácil y basta calcular P' usando que M es el punto medio del segmento $\overline{PP'}$



6. RECTAS QUE SE APOYAN SOBRE OTRAS DOS RECTAS DADAS

a: Recta que se apoya en dos rectas dadas y pasa por un punto determinado

Se nos pide calcular una recta s que se apoya en dos rectas r_1 y r_2 y pasa por un punto P . El procedimiento analítico es el siguiente:

- Hallamos el plano π_1 que contiene a la recta r_1 y pasa por el punto P
- Hallamos el plano π_2 que contiene a la recta r_2 y pasa por el punto P
- La recta s pedida es la intersección de π_1 y π_2 ($s = \pi_1 \cap \pi_2$)

b: Recta que se apoya en dos rectas dadas y es paralela a una dada

Se nos pide calcular una recta s que se apoya en dos rectas r_1 y r_2 y es paralela a una recta r . El procedimiento analítico es el siguiente:

- Hallamos el plano π_1 que contiene a la recta r_1 y es paralelo a la recta r
- Hallamos el plano π_2 que contiene a la recta r_2 y es paralelo a la recta r
- La recta s pedida es la intersección de π_1 y π_2 ($s = \pi_1 \cap \pi_2$)

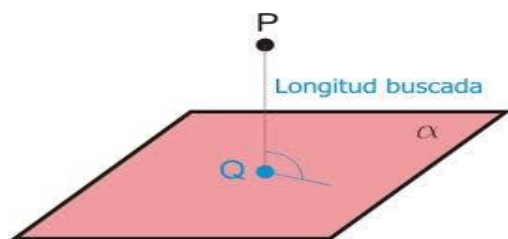
7. DISTANCIAS EN EL PLANO

a: Distancia entre dos puntos

Dados dos puntos $A(x, y, z)$ y $B(x', y', z')$, el vector libre que determinan es $\vec{AB} = (x'-x, y'-y, z'-z)$. Se define la distancia entre los puntos $A(x, y, z)$ y $B(x', y', z')$ como el módulo del vector $\vec{AB} = (x'-x, y'-y, z'-z)$ que determinan, y se representa como $d(A, B) = |\vec{AB}| = \sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2}$

b: Distancia de un punto a un plano

Nos dan un punto $P(x_0, y_0, z_0)$ y un plano $\alpha \equiv Ax + By + Cz + D = 0$ como vemos en el dibujo



Hay dos formas de calcular la distancia o longitud que separa al punto del plano

1ª forma: Calculando el punto Q de forma análoga a como se calculaba el punto M en el simétrico de un punto respecto de un plano. Una vez obtenido Q tenemos que: $d(P, \alpha) = d(P, Q)$

Este método es más largo que el siguiente, pero es razonado.

2ª forma: Aplicando la fórmula $d(P, \alpha) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$

c: Distancia entre dos planos paralelos

Dados dos planos paralelos $\alpha \equiv Ax + By + Cz + D = 0$ y $\beta \equiv Ax + By + Cz + D' = 0$, (¡ojo! Observad que son paralelos y que tienen los mismos coeficientes en las variables). También tenemos dos formas de calcular la distancia entre ellos:

1ª forma: Tomar un punto de uno de ellos y calcular la distancia de ese punto al otro plano

2ª forma: Aplicar la fórmula $d(\alpha, \beta) = \frac{|D - D'|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$