SOLUCIONES

EXAMEN ANÁLISIS: UNIDADES 4, 5 Y 6
2º BACH. D

TIPO A

Cuestión 1.-

Sea f la función definida para $x \neq 1$ por $f(x) = \dfrac{2x^2}{x-1}$

(a) Determina las asíntotas de la gráfica de f.

(b) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los extremos relativos de f.

(c) Esboza la gráfica de f.

Solución

(a) Vemos que el dominio de la función es $Dom(f) = R - \{1\}$

Asíntotas verticales: Únicamente puede tener asíntota vertical en $x = 1$, pues anula el denominador (no es del dominio). Calculamos los límites laterales:

$\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{2x^2}{x-1} = \dfrac{2}{0^+} = +\infty$ → la recta $x = 1$ es asíntota vertical por la derecha

$\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{2x^2}{x-1} = \dfrac{2}{0^-} = -\infty$ → la recta $x = 1$ es asíntota vertical por la izquierda

Asíntotas horizontales:

En $+\infty$ → $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2x^2}{x-1} = +\infty$ → No tiene asíntota horizontal en $+\infty$

En $-\infty$ → $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{2x^2}{x-1} = -\infty$ → No tiene asíntota horizontal en $-\infty$

Asíntotas oblicuas: Son de la forma $y = mx + n$, que pasamos a calcular

En $+\infty$ → $$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2}{x-1} : x = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2}{x^2 - x} = 2$$

$$n = \lim_{x\to+\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{2x^2}{x-1} - 2x\right] = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2 - 2x\cdot(x-1)}{x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{x-1} = 2$$

Luego la recta $r \equiv y = 2x + 2$ es asíntota oblicua en $+\infty$

En $-\infty$ → El procedimiento es análogo a $+\infty$ y como observamos en los límites para nada afecta que se tienda a $-\infty$ en los cálculos de m y n. Por tanto, la recta $r \equiv y = 2x + 2$ es asíntota oblicua en $-\infty$

(b) Pasamos a calcular la función derivada de $f(x) = \dfrac{2x^2}{x-1}$ → $f'(x) = \dfrac{4x\cdot(x-1) - 2x^2}{(x-1)^2}$

→ $f'(x) = \dfrac{2x^2 - 4x}{(x-1)^2}$ Veamos ahora dónde se anula: $\dfrac{2x^2 - 4x}{(x-1)^2} = 0$ → $2x^2 - 4x = 0$ → $\begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$

©ManoloMat.com

Ahora vamos a hacer la tabla de signos de la derivada teniendo en cuenta los punto x = 0, x = 2 y x = 1 (pues éste no está en el dominio). Además sólo ponemos el numerador pues el denominador de la derivada siempre es positivo en el dominio al ser un cuadrado

	$(-\infty,0)$	$(0,1)$	$(1,2)$	$(2,+\infty)$
$2x^2-4x$	+	-	-	+
	f es creciente	f es decreciente	f es decreciente	f es creciente

Resumiendo:

f es creciente en $(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$
f es decreciente en $(0,1)\cup(1,2)$

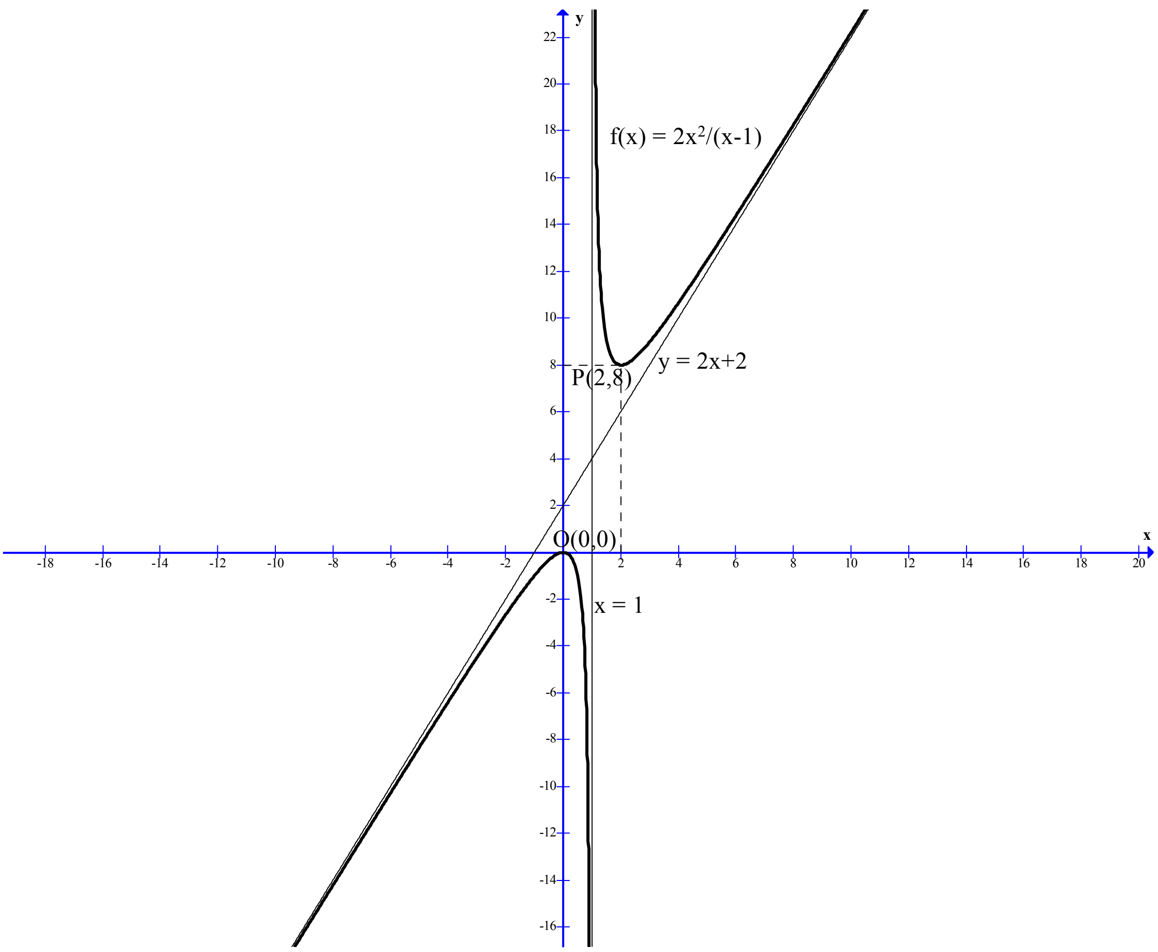
En $x_0=0$, f tiene un máximo relativo y el valor que alcanza es $f(0)=\frac{2\cdot 0^2}{0-1}=0$. El máximo relativo está en el punto O(0,0)

En $x_0=2$, f tiene un mínimo relativo y el valor que alcanza es $f(2)=\frac{2\cdot 2^2}{2-1}=8$. El máximo relativo está en el punto P(2,8)

(c) Con los datos de los dos apartados anteriores y además vamos a ver si la función corta a la asíntota oblicua

$\begin{cases} y=\dfrac{2x^2}{x-1} \\ y=2x+2 \end{cases} \rightarrow 2x+2=\dfrac{2x^2}{x-1} \rightarrow 2x^2-2=2x^2 \rightarrow -2=0$ Absurdo, no hay corte entre la función y la asíntota

Así nos queda la función:



©ManoloMat.com

Cuestión 2.-

Calcula

$$\int_0^{\pi^2} \operatorname{sen}(\sqrt{x})dx$$

Sugerencia: Efectúa el cambio $\sqrt{x} = t$.

Solución

Vamos a calcular la integral indefinida $I = \int sen(\sqrt{x})dx$ haciendo el cambio $\sqrt{x} = t \rightarrow x = t^2 \rightarrow dx = 2tdt$

Sustituimos en la integral indefinida: $I = \int sen(t)\cdot 2\cdot t\cdot dt = 2\int t\cdot sen(t)\cdot dt$. Tenemos una nueva integral

$H = \int t\cdot sen(t)\cdot dt$ que tenemos que hacerla por partes: $\begin{cases} u = t \rightarrow du = dt \\ dv = sen(t)\cdot dt \rightarrow v = \int sen(t)\cdot dt \rightarrow v = -\cos(t) \end{cases}$

Por tanto $H = t\cdot(-\cos(t)) - \int(-\cos(t))\cdot dt \rightarrow H = -t\cdot\cos(t) + sen(t) \rightarrow I = 2[-t\cdot\cos(t) + sen(t)] + C$

Deshacemos el cambio inicial: $I = 2\left[-\sqrt{x}\cdot\cos(\sqrt{x}) + sen(\sqrt{x})\right] + C$

Aplicamos la regla de Barrow: $\int_0^{\pi^2} sen\left(\sqrt{x}\right)dx = 2\left[-\sqrt{x}\cdot\cos(\sqrt{x}) + sen(\sqrt{x})\right]_0^{\pi^2} =$

$2\left[\left(-\sqrt{\pi^2}\cdot\cos(\sqrt{\pi^2}) + sen(\sqrt{\pi^2})\right) - \left(-\sqrt{0}\cdot\cos(\sqrt{0}) + sen(\sqrt{0})\right)\right] \rightarrow$

$\int_0^{\pi^2} sen\left(\sqrt{x}\right)dx = 2[-\pi\cdot\cos(\pi) + sen(\pi)] \rightarrow \int_0^{\pi^2} sen\left(\sqrt{x}\right)dx = 2\pi$

Cuestión 3.-

Calcula $\beta > 0$ para que el área del recinto limitado por las gráficas de las funciones $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x) = x^2 \quad \text{y} \quad g(x) = -x^2 + 2\beta^2$$

sea 72 (unidades de área).

Solución

Calculamos los puntos de corte de las dos funciones en función de $\beta \rightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ y = -x^2 + 2\beta^2 \end{cases} \rightarrow x^2 = -x^2 + 2\beta^2$

$\rightarrow 2x^2 = 2\beta^2 \rightarrow x^2 = \beta^2 \rightarrow x = \pm\beta$

De esto deducimos que el área del recinto que nos piden es $Área = \left|\int_{-\beta}^{\beta}[f(x) - g(x)]dx\right|$ Ponemos valor absoluto pues en principio no sabemos que función está por encima (aunque no es difícil darse cuenta de que es g)

Calculamos $\int_{-\beta}^{\beta}[f(x) - g(x)]dx = \int_{-\beta}^{\beta}\left[x^2 - \left(-x^2 + 2\beta^2\right)\right]dx = \int_{-\beta}^{\beta}\left[2x^2 - 2\beta^2\right]dx = \left[\frac{2x^3}{3} - 2\beta^2 x\right]_{-\beta}^{\beta} =$

©ManoloMat.com

$\left(\frac{2\beta^3}{3}-2\beta^2\beta\right)-\left(\frac{2(-\beta)^3}{3}-2\beta^2(-\beta)\right)=\frac{2\beta^3}{3}-2\beta^3+\frac{2\beta^3}{3}-2\beta^3=-\frac{8\beta^3}{3}$ que como vemos es negativo pues $\beta>0$

Sustituimos en la expresión del área: $Área=\left|-\frac{8\beta^3}{3}\right|=\frac{8\beta^3}{3}=72 \rightarrow \beta^3=27 \rightarrow \boxed{\beta=3}$

<u>Cuestión 4</u>.-

Sea la función f dada por $f(x)=\frac{1}{x^2+x}$ para $x\neq -1$ y $x\neq 0$. Determina la primitiva F de f tal que $F(1)=1$.

<u>Solución</u>

Calculamos a integral indefinida $I=\int \frac{1}{x^2+x}dx$ Descomponemos en fracciones simples el integrando calculando las raíces del denominador que fácilmente se calculan y son: $\begin{cases} x=0 \\ x=-1 \end{cases}$

$\frac{1}{x^2+x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1} \rightarrow 1=A(x+1)+Bx$. Damos valores a x:

Para $x=0 \rightarrow A=1$

Para $x=-1 \rightarrow B=-1$

Por tanto, $I=\int \frac{1}{x^2+x}dx=\int\left(\frac{1}{x}+\frac{-1}{x+1}\right)dx \rightarrow I=\ln|x|-\ln|x+1|+C$ Estas son todas las primitivas, así que $F(x)=\ln|x|-\ln|x+1|+C$ y como $F(1)=1 \rightarrow \ln 1-\ln 2+C=1 \rightarrow C=1+\ln 2$

Por tanto, $F(x)=\ln|x|-\ln|x+1|+1+\ln 2 \rightarrow \boxed{F(x)=\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|+1+\ln 2}$

EXAMEN ANÁLISIS: UNIDADES 4, 5 Y 6
2º BACH. D

TIPO B

Cuestión 1.-

Sea la función f dada por $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + x}$ para $x \neq -1$ y $x \neq 0$. Determina la primitiva F de f tal que $F(1) = 1$.

Solución

Ver examen tipo A donde está resuelta

Cuestión 2.-

Calcula $\beta > 0$ para que el área del recinto limitado por las gráficas de las funciones $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x) = x^2 \quad \text{y} \quad g(x) = -x^2 + 2\beta^2$$

sea 72 (unidades de área).

Solución

Ver examen tipo A donde está resuelta

Cuestión 3.-

Sea f la función definida para $x \neq 1$ por $f(x) = \dfrac{2x^2}{x-1}$

(a) Determina las asíntotas de la gráfica de f.

(b) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los extremos relativos de f.

(c) Esboza la gráfica de f.

Solución

Ver examen tipo A donde está resuelta

Cuestión 4.-

Calcula

$$\int_1^e x^2 \ln(x)\, \mathrm{d}x$$

(ln denota la función logaritmo neperiano).

Solución

La hacemos por partes la integral indefinida $I = \int x^2 \ln(x) dx$ tomando: $\begin{cases} u = \ln(x) \to du = \dfrac{1}{x} dx \\ dv = x^2 dx \to v = \dfrac{x^3}{3} \end{cases}$

$$I = \int x^2 \ln(x) dx = \frac{x^3}{3}\ln(x) - \int \frac{x^3}{3}\cdot\frac{1}{x} dx \to I = \frac{x^3}{3}\ln(x) - \int \frac{x^2}{3} dx = \frac{x^3}{3}\ln(x) - \frac{x^3}{9} + C$$

Aplicamos la regla de Barrow: $\int_1^e x^2 \ln(x) dx = \left[\dfrac{x^3}{3}\ln(x) - \dfrac{x^3}{9}\right]_1^e = \left(\dfrac{e^3}{3}\ln(e) - \dfrac{e^3}{9}\right) - \left(\dfrac{1^3}{3}\ln(1) - \dfrac{1^3}{9}\right) = \boxed{\dfrac{2e^3 + 1}{9}}$

©ManoloMat.com