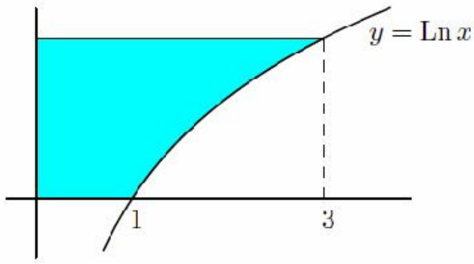
SOLUCIONES

EXAMEN ANÁLISIS: UNIDADES 4, 5 Y 6
2º BACH. C

TIPO A

Cuestión 1.-

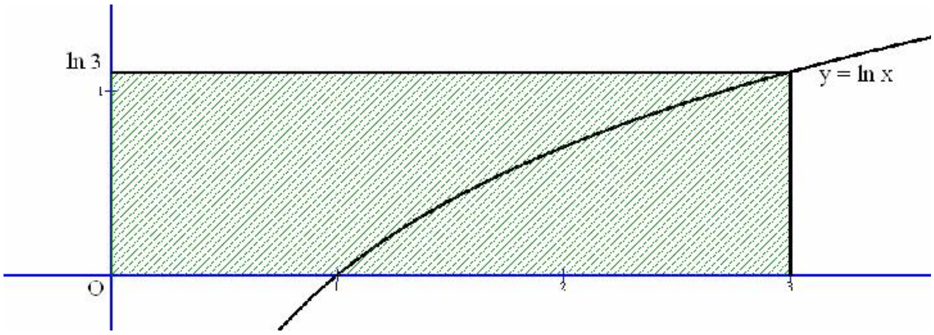
Siendo $\mathrm{Ln}\, x$ el logaritmo neperiano de x, halla el área de la superficie sombreada.



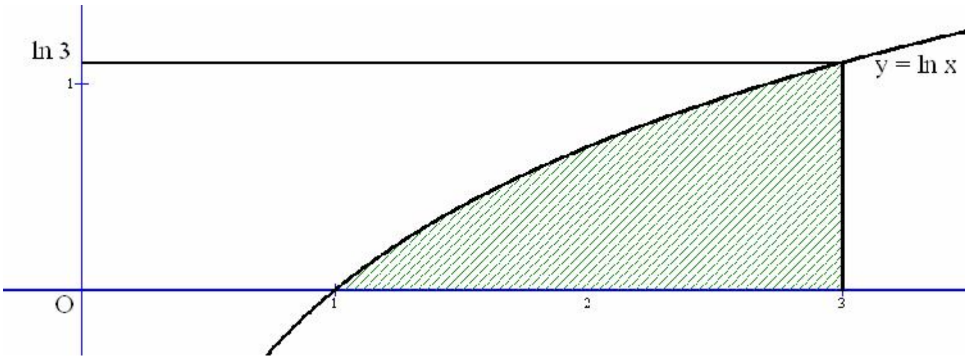
Solución

Vamos a calcularla de la siguiente forma: (hay varias formas de hacerlo)

1º El área del rectángulo que lo hacemos de forma tradicional: base x altura→ $Área_{rectángulo} = 3\cdot\ln 3$



2º El área entre 1 y 3 de la función $y = \ln x$ y se la restamos a la del rectángulo, dándonos el área pedida



$Área_{\ln} = \int_1^3 \ln x dx$. Calculamos la integral indefinida por partes $I = \int \ln x dx$ tomando

$$\begin{cases} u = \ln x \to du = \dfrac{1}{x} dx \\ dv = dx \to v = x \end{cases}$$

$I = \int \ln x dx = x\cdot\ln x - \int x\cdot\frac{1}{x} dx = x\cdot\ln x - \int dx = x\cdot\ln x - x + C$. Aplicamos la regla de Barrow al área:

$$Área_{\ln} = \int_1^3 \ln x dx = \left[x\cdot\ln x - x\right]_1^3 = (3\cdot\ln 3 - 3) - (1\cdot\ln 1 - 1) = 3\cdot\ln 3 - 2$$

Por tanto, $Área = Área_{rectángulo} - Área_{\ln} = 3\cdot\ln 3 - (3\cdot\ln 3 - 2)$→$\boxed{Área = 2\ u^2}$

Cuestión 2.-

Sea $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x^2 e^{-x^2}$.

(a) Halla las asíntotas de la gráfica de f.

(b) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f y calcula sus extremos relativos o locales (puntos en los que se obtienen y valores que alcanza la función).

(c) Esboza la gráfica de f.

Solución

(a) Vemos que el dominio de la función es $Dom(f) = R$

Asíntotas verticales: No tiene pues su dominio son todos los números reales

Asíntotas horizontales:

En $+\infty \rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 \cdot e^{-x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^{x^2}} = 0 \rightarrow$ (la exponencial predomina sobre las polinómicas, o bien aplicar L´Hôpital) Tiene asíntota horizontal en $+\infty$ que es la recta $OX \equiv y = 0$ (el eje de abscisas)

En $-\infty \rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} x^2 \cdot e^{-x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2}{e^{x^2}} = 0 \rightarrow$ Tiene asíntota horizontal en $-\infty$ que es la recta $OX \equiv y = 0$ (el eje de abscisas)

Asíntotas oblicuas: No tiene puesto que tiene horizontales

(b) Pasamos a calcular la función derivada de $f(x) = x^2 \cdot e^{-x^2} \rightarrow f'(x) = 2x \cdot e^{-x^2} + x^2 \cdot e^{-x^2} \cdot (-2x)$ $\rightarrow f'(x) = 2x \cdot e^{-x^2} - 2x^3 \cdot e^{-x^2} \rightarrow f'(x) = 2x \cdot e^{-x^2} \cdot (1 - x^2)$ Veamos ahora dónde se anula:

$$2x \cdot e^{-x^2} \cdot (1 - x^2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ e^{-x^2} = 0 \rightarrow Absurdo \\ 1 - x^2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases} \end{cases}$$

Ahora vamos a hacer la tabla de signos de la derivada teniendo en cuenta los punto x = 0, x = -1 y x = 1. Además sólo ponemos los factores que pueden hacer que cambie el signo pues ni 2 ni la exponencial afectan, son siempre positivos

	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	$(0,1)$	$(1,+\infty)$
$x \cdot (1 - x^2)$	+	-	+	-
	f es creciente	f es decreciente	f es creciente	f es decreciente

Resumiendo:

f es creciente en $(-\infty,-1) \cup (0,1)$

f es decreciente en $(-1,0) \cup (1,+\infty)$

En $x_0 = -1$, f tiene un máximo relativo y el valor que alcanza es $f(-1) = (-1)^2 \cdot e^{-(-1)^2} = e^{-1} = \frac{1}{e}$. El máximo relativo está en el punto $P\left(-1, \frac{1}{e}\right)$

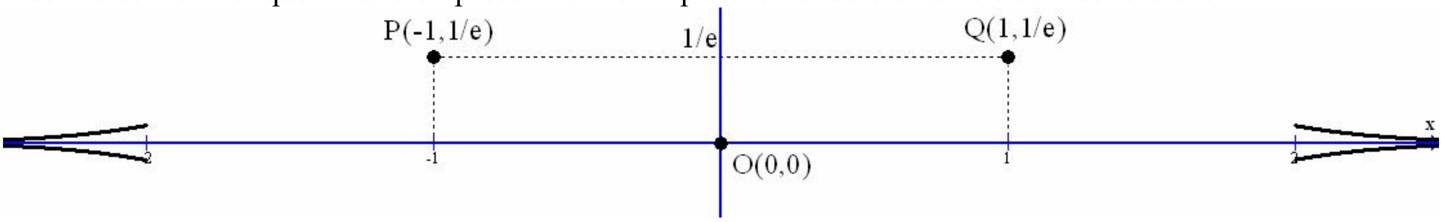
En $x_0 = 0$, f tiene un mínimo relativo y el valor que alcanza es $f(0) = (0)^2 \cdot e^{-(0)^2} = 0$. El mínimo relativo está en el punto O(0,0)

En $x_0 = 1$, f tiene un máximo relativo y el valor que alcanza es $f(1) = (1)^2 \cdot e^{-(1)^2} = e^{-1} = \dfrac{1}{e}$. El máximo relativo está en el punto $Q\left(1, \dfrac{1}{e}\right)$

(c) Con los datos de los dos apartados anteriores y además vamos a ver si la función corta a la asíntota horizontal

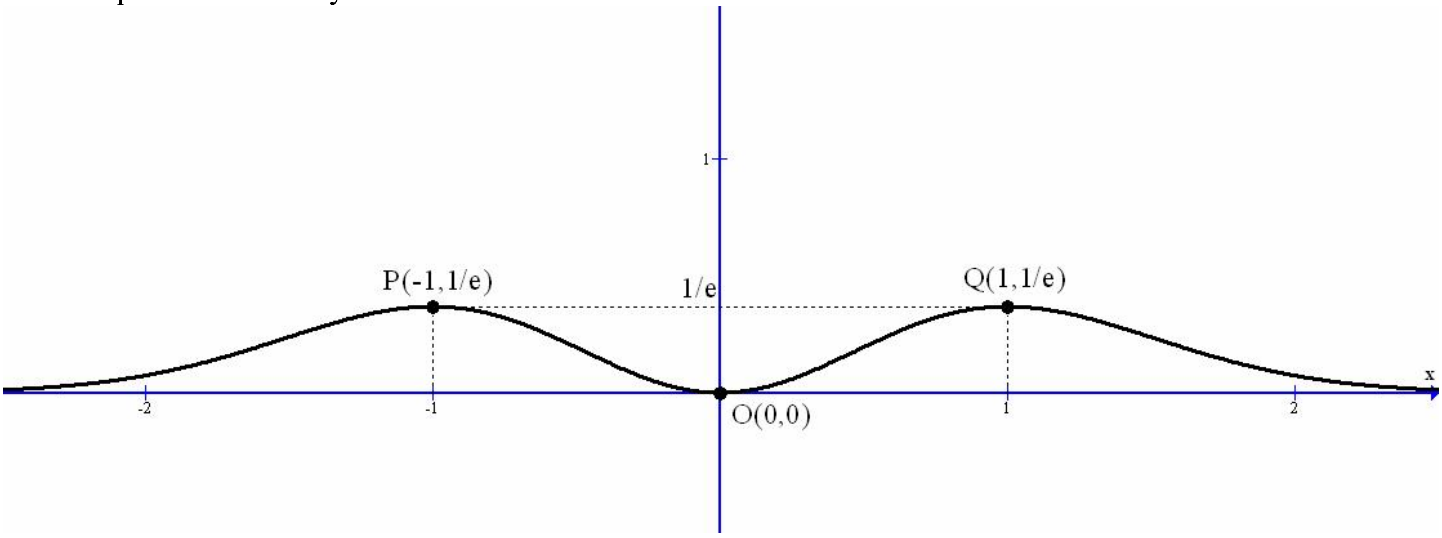
$\begin{cases} y = x^2 \cdot e^{-x^2} \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow x^2 \cdot e^{-x^2} = 0 \rightarrow x^2 = 0 \rightarrow x = 0$ Hay un solo punto de corte que coincide con el mínimo relativo

Además es fácil ver que la función presenta simetría par. Poniéndolo en un sistema de referencia



Y como vemos la función es positiva siempre, luego la gráfica no puede ir por debajo del eje de abscisas que es la asíntota horizontal, pues encima sólo la corta en el origen

Así nos queda la función ya teniendo en cuenta el crecimiento



<u>Cuestión 3</u>.-

Calcula

$$\int_{-2}^{0} \frac{1}{x^2 + 2x - 3}\, dx.$$

<u>Solución</u>

Calculamos la integral indefinida mediante la descomposición en fracciones simples

$I = \displaystyle\int \frac{1}{x^2 + 2x - 3} dx$ Calculamos las raíces del denominador: $x^2 + 2x - 3 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -3 \end{cases}$

Descomponemos: $\dfrac{1}{x^2 + 2x - 3} = \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{B}{x+3} \rightarrow 1 = A \cdot (x+3) + B \cdot (x-1)$ Damos valores a x:

$x = 1 \rightarrow 1 = 4A \rightarrow A = \dfrac{1}{4}$

$x = -3 \rightarrow 1 = -4B \rightarrow B = \dfrac{-1}{4}$

Así, $I = \int \dfrac{1}{x^2+2x-3}dx = \int \left(\dfrac{1/4}{x-1} + \dfrac{-1/4}{x+3} \right)dx = \dfrac{1}{4}\int \dfrac{1}{x-1}dx - \dfrac{1}{4}\int \dfrac{1}{x+3}dx = \dfrac{1}{4}\ln|x-1| - \dfrac{1}{4}\ln|x+3| + C \rightarrow$ y

operando con las propiedades de los logaritmos $I = \ln \sqrt[4]{\left|\dfrac{x-1}{x+3}\right|} + C$

Aplicando la regla de Barrow

$$\int_{-2}^{0} \frac{1}{x^2+2x-3}dx = \left[\ln \sqrt[4]{\left|\frac{x-1}{x+3}\right|} \right]_{-2}^{0} = \ln \sqrt[4]{\left|\frac{0-1}{0+3}\right|} - \ln \sqrt[4]{\left|\frac{-2-1}{-2+3}\right|} = \ln \sqrt[4]{\frac{1}{3}} - \ln \sqrt[4]{3} =$$

$$\ln \sqrt[4]{1} - \ln \sqrt[4]{3} - \ln \sqrt[4]{3} = -2\ln \sqrt[4]{3} \rightarrow \int_{-2}^{0} \frac{1}{x^2+2x-3}dx = -2\ln \sqrt[4]{3} \cong -0.5493$$

<u>Cuestión 4</u>.-

Considera la función $f : [0,4] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 4x & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ \dfrac{16}{(x+1)^2} & \text{si } 1 < x < 3 \\ 4 - x & \text{si } 3 \le x \le 4 \end{cases}$$

(a) Esboza la gráfica de f.

(b) Halla el área del recinto limitado por la gráfica de f y el eje de abscisas.

<u>Solución</u>

Lo primero ha tener en cuenta es que el dominio de la función es [0, 4] y ahí nos debemos restringir. Por otro lado es fácil ver que la función es continua en $x_0 = 1$ y $x_0 = 3$

(a) La primera y tercera parte de la función es muy fácil de dibujar pues se tratan de rectas y las limitaciones nos dan segmentos

La que plantea algún problema es $y = \dfrac{16}{(x+1)^2}$, que le vamos a calcular las asíntotas y su monotonía y extremos para esbozarla. Su dominio es $Dom(y) = R - \{-1\}$ y es siempre positiva (su gráfica está por encima del eje OX)

<u>Asíntotas verticales</u>: Únicamente puede tener asíntota vertical en $x = -1$, pues anula el denominador (no es del dominio). Calculamos los límites laterales:

$\lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{16}{(x+1)^2} = \dfrac{16}{0^+} = +\infty \rightarrow$ la recta $x = -1$ es asíntota vertical por la derecha

$\lim\limits_{x \to -1^-} \dfrac{16}{(x+1)^2} = \dfrac{16}{0^+} = +\infty \rightarrow$ la recta $x = -1$ es asíntota vertical por la derecha

<u>Asíntotas horizontales</u>:

En $+\infty \rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{16}{(x+1)^2} = 0 \rightarrow$ Tiene asíntota horizontal en $+\infty$ y es el eje OX$\equiv y = 0$

En $-\infty \rightarrow \underset{x\to-\infty}{lím} \dfrac{16}{(x+1)^2} = 0 \rightarrow$ Tiene asíntota horizontal en $-\infty$ y es el eje OX$\equiv y = 0$

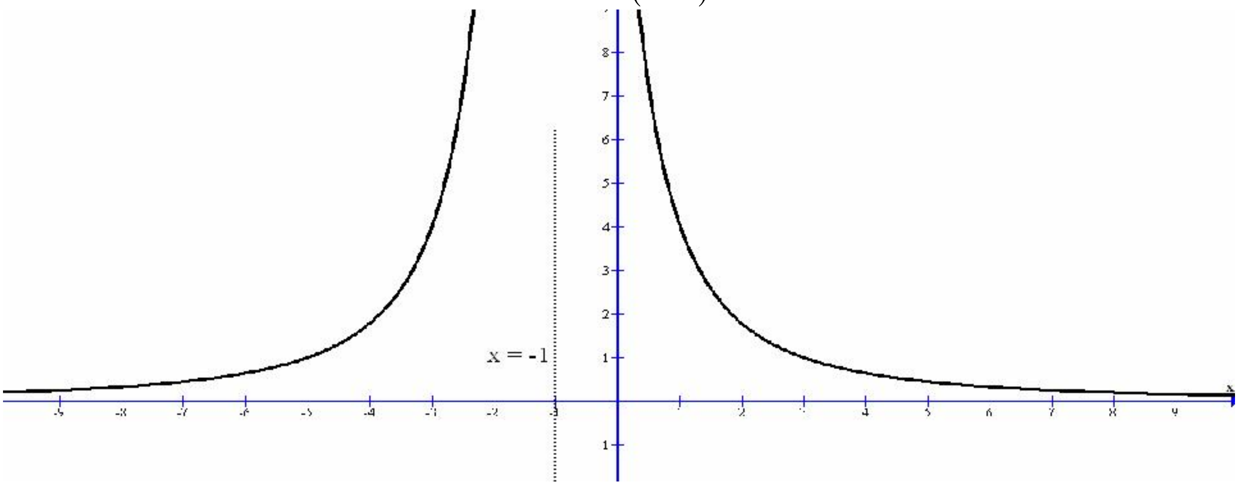
<u>Asíntotas oblicuas</u>: No tiene pues tiene horizontales

Monotonía y extremos: Derivamos y tenemos $y' = \dfrac{-32}{(x+1)^3}$ (se deriva muy fácil pues podemos poner $y = 16 \cdot (x+1)^{-2}$) Es obvio que nunca se anula, luego no tiene extremos.

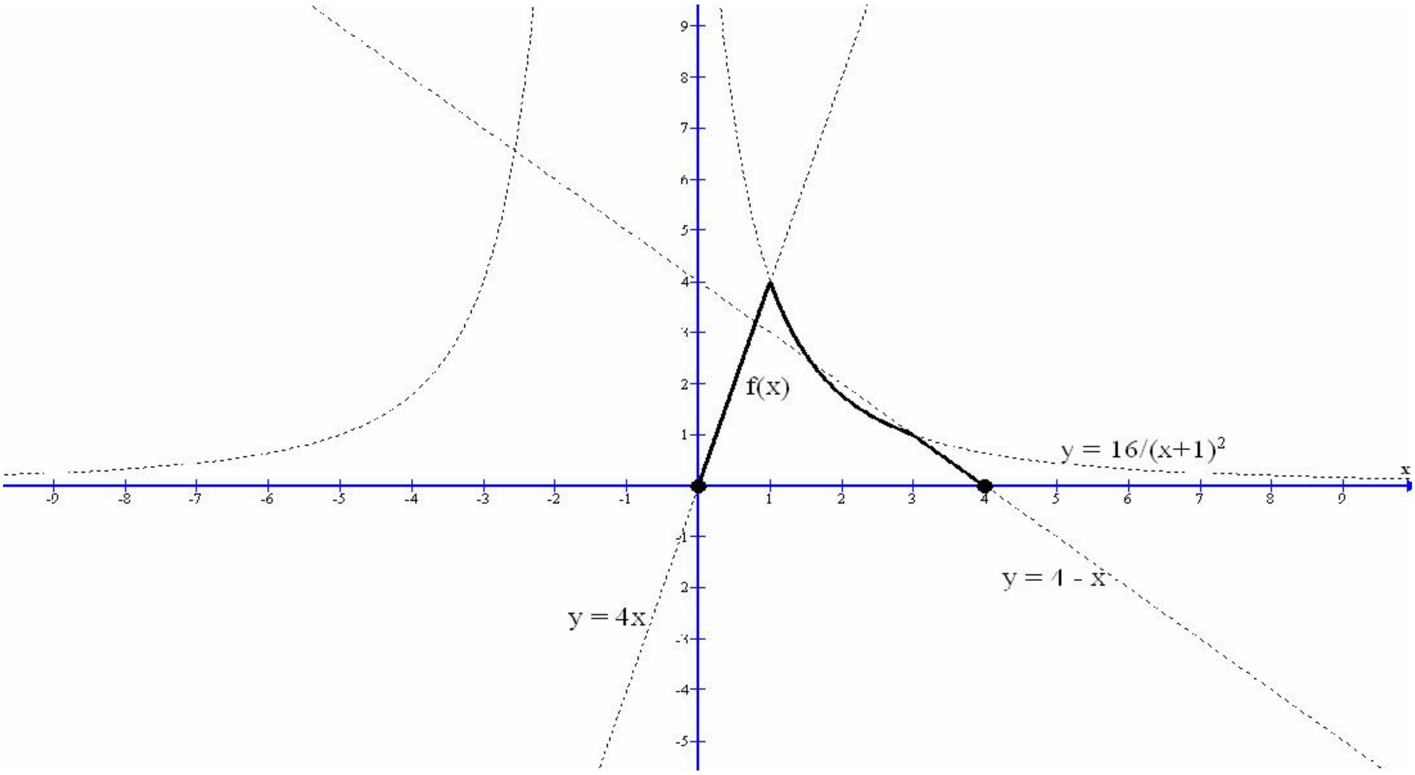
Estudiamos el signo de la derivada pues si hay un punto $x_0 = -1$ que al no ser del dominio influye en el signo de la derivada

	$(-\infty,-1)$	$(-1,+\infty)$
$y' = \dfrac{-32}{(x+1)^3}$	+	-
	f es creciente	f es decreciente

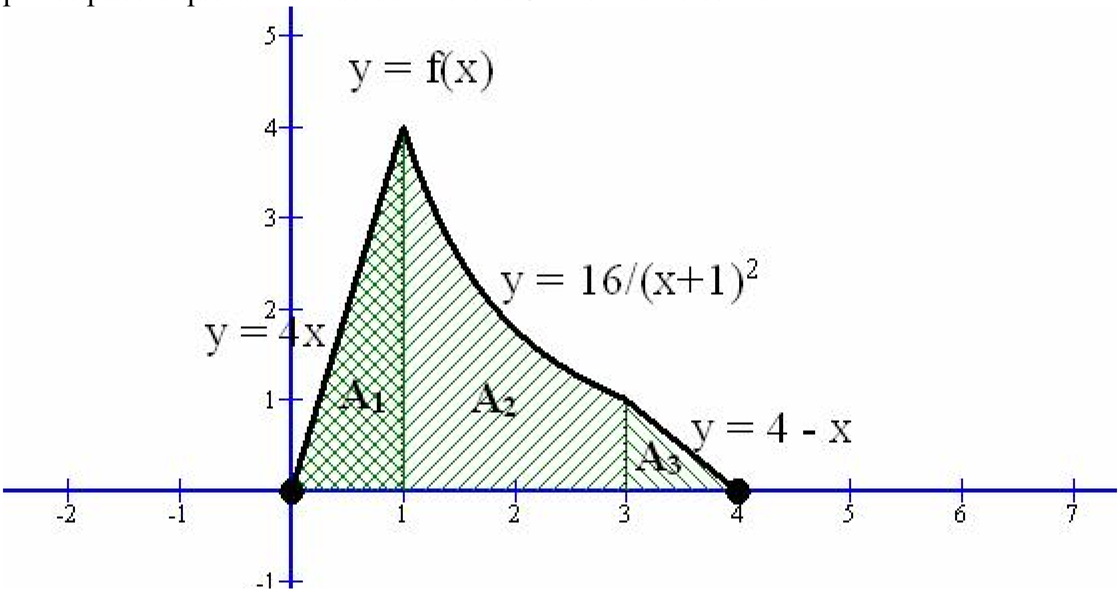
Con estos datos podemos dibujar la función $y = \dfrac{16}{(x+1)^2}$



Dibujamos ya todas las funciones en un solo sistema y punteado dejamos las partes de las funciones que no son necesarias



(b) Nos piden Área = $\int_0^4 f(x)dx$ pues la función como vemos es positiva, pero tenemos que trocearla en tres partes puesto que cambia de definición. Gráficamente sería:



s

Área = $\int_0^4 f(x)dx = A_1 + A_2 + A_3$

Calculamos cada una de ellas:

$$A_1 = \int_0^1 4x\,dx = \left[2x^2\right]_0^1 = 2 \text{ u}^2$$

$$A_2 = \int_1^3 \frac{16}{(x+1)^2}dx = \left[\frac{-16}{x+1}\right]_1^3 = \frac{-16}{4} - \left(\frac{-16}{2}\right) = 4 \text{ u}^2$$

$$A_3 = \int_3^4 (4-x)dx = \left[4x - \frac{x^2}{2}\right]_3^4 = (16-8) - \left(12 - \frac{9}{2}\right) = \frac{1}{2} \text{ u}^2$$

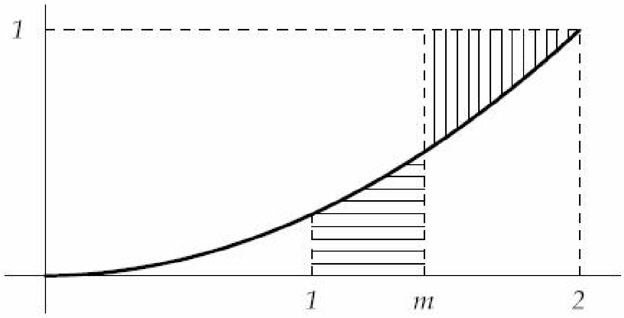
Por tanto, Área = $\int_0^4 f(x)dx = A_1 + A_2 + A_3 = \left(2+4+\frac{1}{2}\right)\text{u}^2 \rightarrow \boxed{\text{Área} = \frac{13}{2}\text{ u}^2}$

EXAMEN ANÁLISIS: UNIDADES 4, 5 Y 6
2º BACH. D

TIPO B

Cuestión 1.-

En la figura adjunta puedes ver representada en el intervalo $[0,2]$ la gráfica de la parábola de ecuación $y = x^2/4$. Halla el valor de m para el que las áreas de las superficies rayadas son iguales.



Solución

Llamemos A_1 al área que va desde 1 a m y A_2 al área sombreada que va desde m a 2 y las calculamos por separado:

A_1: Esta es fácil de calcular pues $A_1 = \int_1^m \frac{x^2}{4}dx = \left[\frac{x^3}{12}\right]_1^m = \frac{m^3}{12} - \frac{1^3}{12} = \frac{m^3-1}{12}$

A_2: Esta es un poco más difícil de calcular pero la podemos entender como la región limitada por la recta horizontal $y=1$ (que está por encima de la parábola), la parábola $y = \frac{x^2}{4}$ entre $x = m$ y $x = 2$

$$A_2 = \int_m^2 \left(1 - \frac{x^2}{4}\right)dx = \left[x - \frac{x^3}{12}\right]_m^2 = \left(2 - \frac{8}{12}\right) - \left(m - \frac{m^3}{12}\right) = \frac{4}{3} - m + \frac{m^3}{12} = \frac{m^3 - 12m + 16}{12}$$

Igualamos las dos áreas y despejamos $m \rightarrow \frac{m^3-1}{12} = \frac{m^3-12m+16}{12} \rightarrow 12m = 17 \rightarrow \boxed{m = \frac{17}{12}}$

Cuestión 2.-

Considera la función $f : [0,4] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 4x & \text{si} \quad 0 \le x \le 1 \\ \dfrac{16}{(x+1)^2} & \text{si} \quad 1 < x < 3 \\ 4 - x & \text{si} \quad 3 \le x \le 4 \end{cases}$$

(a) Esboza la gráfica de f.

(b) Halla el área del recinto limitado por la gráfica de f y el eje de abscisas.

Solución

Ver examen tipo A donde está resuelta

Cuestión 3.-

Considera la integral definida $I = \int_1^9 \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx$.

(a) Expresa la anterior integral definida aplicando el cambio de variables $1+\sqrt{x} = t$.

(b) Calcula I.

Solución

(a) Haciendo el cambio de variable indicado en el problema: $\boxed{1+\sqrt{x} = t}$ → $\sqrt{x} = t-1$ → $x = (t-1)^2$ → $\boxed{dx = 2\cdot(t-1)dt}$

Vamos a ver como cambian los límites de integración: $\begin{cases} x = 9 \to t = 1+\sqrt{9} \to t = 4 \\ x = 1 \to t = 1+\sqrt{1} \to t = 2 \end{cases}$

Sustituimos y nos queda $I = \int_2^4 \frac{1}{t}\cdot 2\cdot(t-1)dt$, que operando un poco lo dejamos más presentable:

$I = 2\int_2^4 \frac{t-1}{t}\,dt$ y descomponiendo la fracción integrando en dos sumandos, $\boxed{I = 2\int_2^4 (1-\frac{1}{t})dt}$

(b)
Por el apartado (a) podemos aplicar la regla de Barrow pues la primitiva es inmediata

$I = 2\int_2^4 (1-\frac{1}{t})dt = \left[2\cdot(t-\ln|t|)\right]_2^4 = 2[(4-\ln 4)-(2-\ln 2)]$ → $\boxed{I = 2\cdot[2-\ln 2] = 4-\ln 4}$

Cuestión 4.-

Sea $f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x^2 e^{-x^2}$.

(a) Halla las asíntotas de la gráfica de f.

(b) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f y calcula sus extremos relativos o locales (puntos en los que se obtienen y valores que alcanza la función).

(c) Esboza la gráfica de f.

Solución

Ver examen tipo A donde está resuelta