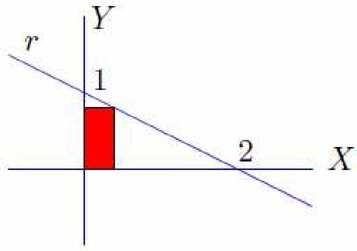
SOLUCIONES

EXAMEN ANÁLISIS: UNIDADES 1, 2 Y 3
2º BACH. D

Cuestión 1.-

De entre todos los rectángulos situados en el primer cuadrante que tienen dos de sus lados sobre los ejes coordenados y un vértice en la recta r de ecuación $\frac{x}{2}+y=1$ (ver figura), determina el que tiene mayor área.



Solución

Tomamos como variables los lados del rectángulo:
x = lado horizontal sobre el eje OX, además $0 \le x \le 2$
y = lado vertical sobre el eje OY, además
La función a optimizar (a maximizar en este caso es) $A(x,y)=x\cdot y$
La ligadura es la ecuación de la recta pues el vértice superior izquierdo del rectángulo está en dicha recta:
$\frac{x}{2}+y=1 \rightarrow$ (despejamos la y por ejemplo) $y=1-\frac{x}{2}$ y sustituimos en la función área a optimizar para quedarnos con una sola variable$\rightarrow A(x)=x\cdot\left(1-\frac{x}{2}\right) \rightarrow A(x)=x-\frac{x^2}{2}$

Derivamos e igualamos a 0: $A'(x)=1-\frac{2x}{2}=1-x \rightarrow 1-x=0 \rightarrow x=1$

Con la 2ª derivada vemos que tipo de extremo es: $A''(x)=-1 \rightarrow A''(1)=-1<0 \rightarrow x=1$ es un máximo relativo
Veamos que es absoluto comparándolo con $x=0$ y $x=2$, que son los extremos del dominio de la función

$A(x) \rightarrow \begin{cases} A(0)=0 \\ A(1)=\frac{1}{2} \\ A(2)=0 \end{cases} \rightarrow$ $x=1$ es máx. absoluto. Las dimensiones del rectángulo son:

Base(la x) = 1, Altura(la y) = $\frac{1}{2}$

Cuestión 2.-

Sea $f:(0,+\infty)\longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=\frac{3x+1}{\sqrt{x}}$.

(a) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los extremos relativos de f (puntos donde se obtienen y valores que se alcanzan).

(b) Calcula el punto de inflexión de la gráfica de f.

Solución

(a) Derivamos la función: $f'(x)=\dfrac{3\cdot\sqrt{x}-(3x+1)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\left(\sqrt{x}\right)^2}$ →(operamos en el numerador haciendo la diferencia

$$f'(x)=\dfrac{\frac{3\cdot\sqrt{x}\cdot 2\cdot\sqrt{x}-(3x+1)}{2\sqrt{x}}}{x} \rightarrow f'(x)=\dfrac{\frac{6x-3x-1}{2\sqrt{x}}}{x} \rightarrow f'(x)=\frac{3x-1}{2x\sqrt{x}}$$

Igualamos a 0: $\frac{3x-1}{2x\sqrt{x}}=0 \rightarrow 3x-1=0 \rightarrow x=\frac{1}{3}$

Construimos la tabla de signos de la derivada:

	$\left(0,\frac{1}{3}\right)$ (aquí podemos tomar $\frac{1}{4}$ por ejemplo)	$\left(\frac{1}{3},+\infty\right)$ (aquí podemos tomar 1 por ejemplo)
$3x-1$ (no hace falta poner toda la derivada $2x\sqrt{x}$ es positivo siempre pues $x>0$)	-	+
	Decreciente $\downarrow$	Creciente $\uparrow$

Tenemos por tanto:

- f decreciente en $\left(0,\frac{1}{3}\right)$
- f creciente en $\left(\frac{1}{3},+\infty\right)$
- En $x_0=\frac{1}{3}$ tiene un mínimo relativo (en este caso es además absoluto) y el valor que alcanza es

$$f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{3\cdot\frac{1}{3}+1}{\sqrt{\frac{1}{3}}} \rightarrow f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{\frac{1}{\sqrt{3}}}=2\sqrt{3}$$

(b) Para calcular el punto de inflexión, calculamos la derivada segunda:

$$f''(x)=\frac{3\cdot 2x\sqrt{x}-(3x-1)\cdot\left(2\sqrt{x}+2x\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{\left(2x\sqrt{x}\right)^2} \rightarrow f''(x)=\frac{6x\sqrt{x}-(3x-1)\cdot\left(\frac{2\sqrt{x}\cdot 2\sqrt{x}+2x}{2\sqrt{x}}\right)}{\left(2x\sqrt{x}\right)^2} \rightarrow$$

$$f''(x)=\frac{6x\sqrt{x}-(3x-1)\cdot\left(\frac{6x}{2\sqrt{x}}\right)}{\left(2x\sqrt{x}\right)^2} \rightarrow f''(x)=\frac{6x\sqrt{x}-\left(\frac{(3x-1)\cdot 3x}{\sqrt{x}}\right)}{4x^3} \rightarrow f''(x)=\frac{\frac{6x^2-(3x-1)\cdot 3x}{\sqrt{x}}}{4x^3} \rightarrow$$

$$f''(x)=\frac{-3x^2+3x}{4x^3\sqrt{x}} \rightarrow \boxed{f''(x)=\frac{-3x+3}{4x^2\sqrt{x}}}.$$

Igualamos a 0: $\frac{-3x+3}{4x^2\sqrt{x}}=0 \rightarrow x=1$

Hacemos la tabla de signos de la derivada 2ª:

	$(0,1)$	$(1,+\infty)$
$-3x+3$ (no hace falta poner toda la derivada segunda: $4x^2\sqrt{x}$ es positivo siempre)	+	-
	Cóncava $\cup$	Convexa $\cap$

Luego en $\boxed{x=1}$ hay un punto de inflexión. En concreto es el punto (1, 4)

Cuestión 3.-

Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = 2x^3 + 12x^2 + ax + b$. Determina a y b sabiendo que la recta tangente a la gráfica de f en su punto de inflexión es la recta $y = 2x + 3$.

Solución

Calculamos la derivada primera y la segunda para ver el punto de inflexión:

$f'(x) = 6x^2 + 24x + a \rightarrow f''(x) = 12x + 24$

Igualamos a 0 la 2ª derivada: $f''(x) = 12x + 24 = 0 \rightarrow x = -2$ es el único posible punto de inflexión, como el enunciado afirma que hay uno sólo, ha de ser éste, y no hace falta comprobar que efectivamente lo es.

Como la recta tangente es $y = 2x + 3$, la pendiente $m = 2$ ha de ser igual a

$f'(-2) \rightarrow f'(-2) = 2 \rightarrow f'(-2) = 6(-2)^2 + 24\cdot(-2) + a = 2 \rightarrow 24 - 48 + a = 2 \rightarrow \boxed{a = 26}$

En $x = -2$, la recta tangente toma el valor $y(-2) = 2\cdot(-2) + 3 = -1 \rightarrow$(luego f también ha de valer -1 en ese punto) $f(-2) = -1 \rightarrow f(-2) = 2\cdot(-2)^3 + 12\cdot(-2)^2 + 26\cdot(-2) + b = -1 \rightarrow -16 + 48 - 52 + b = -1 \rightarrow \boxed{b = 19}$

(también se puede resolver aplicando la recta tangente $t \equiv y = f'(-2)\cdot(x - (-2)) + f(-2)$, sustituyendo e igualando a la recta dada, pero me parece más largo)

Cuestión 4.-

Calcula

$$\lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{Ln}(1+x) - \mathrm{sen}\, x}{x \cdot \mathrm{sen}\, x},$$

siendo $\mathrm{Ln}(1+x)$ el logaritmo neperiano de $1 + x$.

Solución

L=$\displaystyle\lim_{x \to 0}\left(\frac{\ln(1+x) - senx}{x \cdot senx}\right)$, si sustituimos resulta $\dfrac{\ln 1 - sen 0}{0 \cdot sen 0} = \dfrac{0}{0}$, indeterminación a la que aplicamos la regla de L'Hôpital:

L=$\displaystyle\lim_{x \to 0}\left(\frac{\ln(1+x) - senx}{x \cdot senx}\right) = \lim_{x \to 0}\left(\frac{\frac{1}{1+x} - \cos x}{senx + x\cos x}\right)$, que si sustituimos vuelve a salir indeterminación $\dfrac{0}{0}$ y volvemos a aplicar la regla de L'Hôpital:

$$L = \lim_{x \to 0}\left(\frac{\frac{1}{1+x} - \cos x}{senx + x\cos x}\right) = \lim_{x \to 0}\left(\frac{\frac{-1}{(1+x)^2} + senx}{\cos x + \cos x + x\cdot(-senx)}\right) = \frac{-1+0}{1+1+0} \rightarrow \boxed{L = \lim_{x \to 0}\left(\frac{\ln(1+x) - senx}{x \cdot senx}\right) = \frac{-1}{2}}$$