RELACIÓN: EJERCICIOS DE UNIDAD 2 – DERIVADAS

1. Halla la derivada de la función $f(x) = \dfrac{2}{x+1}$ en el punto x = 3, aplicando la definición dederivada.

1º f(a) $\Rightarrow f(3) = \dfrac{2}{3+1} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$

2º f(a+h) $\Rightarrow f(3+h) = \dfrac{2}{3+h+1} = \dfrac{2}{4+h}$

3º $f(a+h)-f(a)$ $\Rightarrow f(3+h)-f(3) = \dfrac{2}{4+h} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{4-1.(4+h)}{2(4+h)} = \dfrac{-h}{2(4+h)}$

4º $f'(a) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ $\Rightarrow f'(3) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\frac{-h}{2(4+h)}}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{-h}{2h(4+h)} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{-1}{2(4+h)} = \dfrac{-1}{8}$

2. Calcula la derivada de las siguientes funciones :

a) $f(x) = \operatorname{sen} x^2$ $f(x) = \operatorname{sen} x^2 \rightarrow f = x^2 \rightarrow f' = 2x$ $\Rightarrow f'(x) = 2x \cos x^2$ (seno)

b) $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$ $f(x) = (\operatorname{sen} x)^2 \rightarrow f = \operatorname{sen} x \rightarrow f' = \cos x$ $\Rightarrow f'(x) = 2\operatorname{sen} x \cdot \cos x$ (potencial)

c) $f(x) = (3x^2 - 2)^5$ $f(x) = (3x^2-2)^5 \rightarrow f = 3x^2-2 \rightarrow f' = 6x$ $\Rightarrow f'(x) = 30x\,(3x^2-2)^4$

d) $f(x) = \sqrt[3]{x^2-3}$ $f(x) = \sqrt[3]{x^2-3} \rightarrow f = x^2-3 \rightarrow f' = 2x$ $\Rightarrow f'(x) = \dfrac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2-3)^2}}$

e) $f(x) = e^{3x+2}$ $f(x) = e^{3x+2} \rightarrow f = 3x+2 \rightarrow f' = 3$ $\Rightarrow f'(x) = 3 \cdot e^{3x+2}$

f) $\log_3(4x+1)$ $\log_3(4x+1) \rightarrow f = 4x+1 \rightarrow f' = 4$ $\Rightarrow f'(x) = \dfrac{4}{(4x+1).\ln 3}$

g) $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x}$ $f(x) = \sqrt{x^2-3x} \rightarrow f = x^2-3x$ $f' = 2x-3$ $\Rightarrow f'(x) = = \dfrac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x}}$

h) $f(x) = \operatorname{sen}^2(2x^3 + 2x)$ $f(x) = \left[\underbrace{\operatorname{sen}(2x^3+2x)}_{f}\right]^2$

1. potencial $\rightarrow f'(x) = 2\cdot\left[\operatorname{sen}(2x^3+2x)\right]\cdot f'$.....$f'(x) = 2\cdot\left[\operatorname{sen}(2x^3+2x)\right]\cdot\cos(2x^3+2x)\cdot\left(6x^2+2\right)$

2. seno $\rightarrow f'(x) = \cos(2x^3+2x)\cdot f'$.................. $f'(x) = \cos(2x^3+2x)\cdot\left(6x^2+2\right)$ esto es f´de 1.

3. suma $\rightarrow f'(x) = 6x^2+2$ esto es f´de 2. Completamos.

3. Halla las funciones derivadas de las siguientes funciones :

a) $f(x)=\dfrac{1}{7x+1} \;\Rightarrow\; f'(x)=\dfrac{0\cdot(7x+1)-1\cdot 7}{(7x+1)^2} \;\Rightarrow f'(x)=-\dfrac{7}{(7x+1)^2}$

b) $f(x)=x^{2/3} \;\Rightarrow\; f'(x)=\dfrac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} \;\Rightarrow f'(x)=\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

c) $f(x)=x^2\cdot x^{\frac{1}{3}} \quad f(x)=x^{\frac{7}{3}} \;\Rightarrow f'(x)=\dfrac{7}{3}x^{\frac{7}{3}-1} \;\Rightarrow f'(x)=\dfrac{7}{3}x^{\frac{4}{3}} \;\Rightarrow f'(x)=\dfrac{7\sqrt[3]{x^4}}{3}$

d) $f(x)=\left(x-\sqrt{1-x^2}\right)^2 \Rightarrow f'(x)=2\left(x-\sqrt{1-x^2}\right)\left(1+\dfrac{2x}{2\sqrt{1-x^2}}\right) \Rightarrow f'(x)=2\left(x-\sqrt{1-x^2}\right)\left(1+\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$

e) $f(x)=\dfrac{e^{2x}}{x^2} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{\left(2\cdot e^{2x}\right)\cdot x^2-\left(e^{2x}\cdot 2x\right)}{x^4} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{2x\cdot e^{2x}\cdot(x-1)}{x^4} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{2\cdot e^{2x}\cdot(x-1)}{x^3}$

f) $f(x)=x\cos 2x \;\Rightarrow f'(x)=1.\cos 2x+x(-\mathrm{sen}\,2x)2 \;\Rightarrow f'(x)=\cos 2x-2x\,\mathrm{sen}\,2x$

g) $f(x)=\ln\cos x \;\Rightarrow f'(x)=\dfrac{-\mathrm{sen}\,x}{\cos x} \;\Rightarrow f'(x)=-\mathrm{tg}\,x$

h) $f(x)=\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}} \;\Rightarrow\; 1.\;\; f'(x)=\dfrac{\dfrac{-2}{(1+x)^2}}{2\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}} \Rightarrow f'(x)=-\dfrac{1}{(1+x)^2\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}}$

Derivamos: $\dfrac{1-x}{1+x}=\dfrac{-1(1+x)-(1-x)\cdot 1}{(1+x)^2} \Rightarrow \dfrac{-1-x-1+x}{(1+x)^2}=\dfrac{-2}{(1+x)^2}$ lo colocamos en f´de 1.

i) $f(x)=e^{x^2}\cdot\mathrm{tg}\,x \;\Rightarrow f'(x)=2x\cdot e^{x^2}\cdot\mathrm{tg}\,x+e^{x^2}\cdot\dfrac{1}{\cos^2 x} \;\Rightarrow$

$f'(x)=e^{x^2}\left(2x\cdot\mathrm{tg}\,x+\dfrac{1}{\cos^2 x}\right) \;\Rightarrow\; f'(x)=e^{x^2}\left(2x\cdot\mathrm{tg}\,x+1+\mathrm{tg}^2 x\right)$

Ejercicios propuestos

1. $f(x) = (1+3x^4)^5$
2. $f(x) = (1+x+x^2)^3$
3. $f(x) = \dfrac{1}{(x^2-1)^4}$
4. $f(x) = \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{2}{(x-1)^2} + \dfrac{3}{(x-1)^3}$
5. $f(x) = \sqrt{1-x^2}$
6. $f(x) = \sqrt[3]{2+5x^2}$
7. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{(x^3-2)^2}}$
8. $f(x) = (5x^3+1)^3 \cdot (x^2+x+1)^4$
9. $f(x) = (5-3\cos x)^4$
10. $f(x) = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}^3 x$
11. $f(x) = \dfrac{1}{\operatorname{arc\,tg} x}$
12. $f(x) = \operatorname{sen}^3 x - \cos^3 x$
13. $f(x) = \dfrac{1}{3\cos^3 x} - \dfrac{1}{\cos x}$
14. $f(x) = \operatorname{sen}(x^2)$
15. $f(x) = (1+\operatorname{sen} 5x)^4$
16. $f(x) = \sqrt{x e^x + x}$
17. $f(x) = \sqrt[3]{2^x + x}$
18. $f(x) = \operatorname{Ln}(\ln x)$
19. $f(x) = \operatorname{Arc\,cos}\sqrt{x}$
20. $f(x) = \operatorname{Arc\,sen}\left(\frac{1}{x^2}\right)$
21. $f(x) = \dfrac{1+\cos 2x}{1-\cos 2x}$
22. $f(x) = \operatorname{Arc\,tg}\left(\frac{1}{x}\right)$
23. $f(x) = \operatorname{Arc\,tg}(e^x)$
24. $f(x) = \operatorname{Arc\,sen}\left(\frac{x^2-1}{x^2}\right)$
25. $f(x) = \operatorname{Ln}(\operatorname{sen} x)$
26. $f(x) = \operatorname{sen}^3 x \cdot \cos^3 x$
27. $f(x) = \dfrac{1+\operatorname{sen}^2 x}{1+\cos^2 x}$
28. $f(x) = x^2 \cdot e^{x^3}$
29. $f(x) = e^{\sqrt{x^2+1}}$
30. $f(x) = \left[\dfrac{x^2+x+1}{x^3-6}\right]^5$
31. $f(x) = \left[\dfrac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\operatorname{sen} x - \cos x}\right]^3$
32. $f(x) = x \cdot e^{-1/x^2}$
33. $f(x) = \sec(x^2) + \operatorname{cosec}(x^2)$
34. $f(x) = \dfrac{1-\cos(x^2)}{1+\cos(x^2)}$
35. $f(x) = (1+e^{\operatorname{sen} x})^3$
36. $f(x) = \operatorname{Ln}(\sqrt{1+e^x}-1) - \operatorname{Ln}(\sqrt{1+e^x}+1)$
37. $f(x) = \operatorname{Ln}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}}$
38. $f(x) = \operatorname{Ln}\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}}$
39. $f(x) = \operatorname{Arc\,tg}(x^2-1)$
40. $f(x) = \operatorname{Arc\,tg}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$
41. $f(x) = \operatorname{Arc\,sen}(1-x) + \sqrt{2x-x^2}$
42. $f(x) = \dfrac{\operatorname{Arc\,cos} x}{\sqrt{1-x^2}}$
43. $f(x) = \operatorname{Ln}\left(\cos\frac{x-1}{x}\right)$
44. $f(x) = \sqrt{x^2+1} - \operatorname{Ln}\dfrac{1+\sqrt{x^2+1}}{x}$
45. $f(x) = \operatorname{Ln}\dfrac{1+\sqrt{\operatorname{sen} x}}{1-\sqrt{\operatorname{sen} x}}$
46. $f(x) = \operatorname{Ln}(\operatorname{Ln}(\operatorname{Ln}(\operatorname{Ln} x)))$
47. $f(x) = (x^2)^x$
48. $f(x) = x^{(x^2)}$
49. $f(x) = x^{\operatorname{sen} x}$
50. $f(x) = x^{\cos x}$
51. $f(x) = (\cos x)^{\operatorname{sen} x}$
52. $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$

Soluciones:

1. $60x^3(1+3x^4)$
2. $3(2x+1)(1+x+x^2)^2$
3. $-8x(x^2-1)^{-5}$
4. $-(x-1)^{-2}-4(x-1)^{-3}-9(x-1)^{-4}$
5. $\dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$
6. $\dfrac{10x}{3\sqrt[3]{(2+5x^2)^2}}$
7. $-2x^2(x^3-2)^{-5/3}$
8. $45x^2(5x^3+1)^2(x^2+x+1)^4 +$
   $+\ 4(2x+1)(5x^3+1)^3(x^2+x+1)^3$
9. $12\,\text{sen}\,x\,(5-3\cos x)^3$
10. $\cos x\,(1+2\,\text{sen}\,x+3\,\text{sen}^2 x)$
11. $\dfrac{-1}{(1+x^2)(\text{Arctg}\,x)^2}$
12. $3\,\text{sen}\,x\cos x\,(\text{sen}\,x+\cos x)$
13. $\text{sen}\,x\left[\dfrac{1}{\cos^4 x}-\dfrac{1}{\cos^2 x}\right]$
14. $2x\cos(x^2)$
15. $20\cos 5x\,(1+\text{sen}\,5x)^3$
16. $\dfrac{e^x+xe^x+1}{2\sqrt{xe^x+1}}$
17. $\dfrac{2^x \text{Ln}\,2+1}{3\sqrt[3]{(2^x+x)^2}}$
18. $\dfrac{1}{x\,\text{Ln}\,x}$
19. $\dfrac{-1}{2\sqrt{x-x^2}}$
20. $\dfrac{-2}{x\sqrt{x^4-1}}$
21. $\dfrac{-4\,\text{sen}\,2x}{(1-\cos 2x)^2}$
22. $\dfrac{-1}{1+x^2}$
23. $\dfrac{e^x}{1+e^{2x}}$
24. $\dfrac{2}{x\sqrt{2x^2-1}}$
25. $\cot x$

*** Las soluciones están simplificadas al máximo

26. $3\,\text{sen}^2 x\cos^2 x\,(\cos^2 x-\text{sen}^2 x)$
27. $\dfrac{6\,\text{sen}\,x\cos x}{(1+\cos^2 x)^2}$
28. $xe^{x^3}(2+3x^3)$
29. $\dfrac{x\,e^{\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{x^2+1}}$
30. $5\cdot\left(\dfrac{x^2+x+1}{x^3-6}\right)^4\cdot$
    $\cdot\dfrac{-x^4-2x^3-3x^2-12x-6}{(x^3-6)^2}$
31. $\dfrac{-6}{1-2\,\text{sen}\,x\cos x}\cdot\left(\dfrac{\text{sen}\,x+\cos x}{\text{sen}\,x-\cos x}\right)^2$
32. $e^{-1/x^2}\left(1+\dfrac{2}{x^2}\right)$
33. $2x(\,\text{tg}(x^2)\sec(x^2)-\cot(x^2)\,\text{cosec}(x^2)\,)$
34. $\dfrac{4x\,\text{sen}\,x^2}{(1+\cos(x^2))^2}$
35. $3\,e^{\text{sen}\,x}\cos x\,(1+e^{\text{sen}\,x})^2$
36. $\dfrac{1}{\sqrt{1+e^x}}$
37. $\dfrac{9}{x(x^2+9)}$
38. $\text{cosec}\,x$
39. $\dfrac{2x}{x^4-2x^2+2}$
40. $\dfrac{-2x}{1+x^4}$
41. $\dfrac{-x}{\sqrt{2x-x^2}}$
42. $\dfrac{x\,\text{Arc}\cos x-\sqrt{1-x^2}}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$
43. $\dfrac{1}{x^2}\cdot\text{tg}\left(\dfrac{x-1}{x}\right)$
44. $\dfrac{x^2+1+\sqrt{x^2+1}}{x(1+\sqrt{x^2+1})}=\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}$
45. $\dfrac{\cos x}{\sqrt{\text{sen}\,x}\,(1-\text{sen}\,x)}$
46. $\dfrac{1}{(\text{Ln}(\text{Ln}(\text{Ln}\,x)))(\text{Ln}(\text{Ln}\,x))(\text{Ln}\,x)\,x}$

45\. $2x^{2x}(\text{Ln}\,x+1)$

48. $x^{x^2+1}(2\,\text{Ln}\,x+1)$
49. $x^{\text{sen}\,x}\left(\cos x\,\text{Ln}\,x+\dfrac{\text{sen}\,x}{x}\right)$
50. $x^{\cos x}\left(-\text{sen}\,x\,\text{Ln}\,x+\dfrac{\cos x}{x}\right)$
51. $(\cos x)^{\cos x}\cdot\left(\cos x\,\text{Ln}(\cos x)-\dfrac{\text{sen}^2 x}{x}\right)$
52. $(1+x)^{\frac{1}{x}}\cdot\left(\dfrac{-\text{Ln}(1+x)}{x^2}+\dfrac{1}{x(1+x)}\right)$

EJERCICIO

a) Comprueba que la siguiente función es continua y derivable y halla $f'(0)$, $f'(3)$ y $f'(1)$:

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & \text{si } x < 1 \\ x^2 + x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

b) ¿Cuál es su función derivada?

c) ¿En qué punto se cumple $f'(x) = 5$?

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & \text{si } x < 1 \\ x^2 + x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

a) **Si $x \neq 1$,** la función es continua y derivable, pues está formada por dos polinomios.

Continuidad en $x = 1$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} (3x - 1) = 2 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} (x^2 + x) = 2 \\ f(1) = 2 \end{array}\right\} f(x) \text{ es continua en } x = 1.$$

Derivabilidad en $x = 1$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f'(x) = \lim\limits_{x \to 1} 3 = 3 = f'(1^-) \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f'(x) = \lim\limits_{x \to 1} (2x + 1) = 3 = f'(1^+) \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{Las derivadas laterales existen} \\ \text{y coinciden.}\end{array}$$

Luego, $f(x)$ es derivable en $x = 1$. Además, $f'(1) = 3$.

Así $f(x)$ es continua y derivable en todo $\mathbb{R}$.

$f'(0) = 3$

$f'(3) = 2 \cdot 3 + 1 = 7$

b) $f'(x) = \begin{cases} 3 & x < 1 \\ 2x + 1 & x \geq 1 \end{cases}$

c) Si $f'(x) = 5$, entonces $x \geq 1$. Es decir:

$$f'(x) = 2x + 1 = 5 \quad \to \quad x = \frac{4}{2} = 2 > 1$$

$f'(2) = 5$

EJERCICIO

Comprueba que $f(x)$ es continua pero no derivable en $x = 2$:

$$f(x) = \begin{cases} ln\,(x-1) & \text{si } x < 2 \\ 3x - 6 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

- Si $x \neq 2$, la función es continua y derivable.

- Continuidad en $x = 2$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} ln\,(x-1) = ln\,1 = 0 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} (3x - 6) = 0 \\ f(2) = 0 \end{array}\right\} \; f \text{ es continua en } x = 2.$$

- Derivabilidad en $x = 2$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f'(x) = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1}{x-1} = 1 = f'(2^-) \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f'(x) = \lim\limits_{x \to 2} 3 = 3 = f'(2^+) \end{array}\right\} \; \text{Las derivadas laterales existen pero no coinciden.}$$

$f(x)$ no es derivable en $x = 2$.

EJERCICIO

Calcula la derivada de las siguientes funciones, aplicando previamente las propiedades de los logaritmos:

a) $y = ln\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$ **b)** $y = ln(x\ tg\ x)^2$

c) $y = ln\left(\dfrac{1}{x^2}\cdot\sqrt[3]{x^2-1}\right)$ **d)** $y = ln\sqrt[3]{\dfrac{1}{(1+x)^2}}$

a) $y = ln\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}} = \dfrac{1}{2}\,[ln\,(1-x) - ln\,(1+x)]$

$$y' = \frac{1}{2}\left[\frac{-1}{1-x} - \frac{1}{1+x}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{-1-x-1+x}{1-x^2}\right] = \frac{-1}{1-x^2} = \frac{1}{x^2-1}$$

b) $y = ln\,(x\ tg\ x)^2 = 2[ln\,x + ln\,(tg\ x)]$

$$y' = 2\left[\frac{1}{x} + \frac{1+tg^2\,x}{tg\ x}\right] = 2\left[\frac{1}{x} + \frac{1}{tg\ x} + tg\ x\right] = \frac{2}{x} + 2\ cotg\ x + 2\ tg\ x$$

c) $y = ln\left(\dfrac{1}{x^2}\cdot\sqrt[3]{x^2-1}\right) = -2ln\,x + \dfrac{1}{3}\,ln\,(x^2-1)$

$$y' = \frac{-2}{x} + \frac{1}{3}\cdot\frac{2x}{(x^2-1)} = \frac{-2}{x} + \frac{2x}{3x^2-3} = \frac{-6x^2+6+2x^2}{3x^3-3x} = \frac{-4x^2+6}{3x^3-3x}$$

d) $y = ln\sqrt[3]{\dfrac{1}{(1+x)^2}} = \dfrac{1}{3}\,[ln\,1 - ln\,(1+x)^2] = \dfrac{-2}{3}\,ln\,(1+x)$

$$y' = \frac{-2}{3}\cdot\frac{1}{(1+x)} = \frac{-2}{3+3x}$$

EJERCICIO

Utilizando la definición de derivada, calcula: $f'(-2)$, siendo $f(x) = \dfrac{1}{x}$

$$f'(-2) = \lim_{h\to 0}\frac{f(-2+h)-f(-2)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{1}{-2+h} - \dfrac{1}{-2}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{2-2+h}{-4+2h}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{h}{h(-4+2h)} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{-4+2h} = \frac{-1}{4} = f'(-2)$$

EJERCICIO

Halla la función derivada de $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$ aplicando la definición de derivada.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{x+h-1}{x+h+1} - \dfrac{x-1}{x+1}}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x+1)(x+h-1) - (x-1)(x+h+1)}{h(x+h+1)(x+1)} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{x^2} + \cancel{x}h - \cancel{x} + \cancel{x} + h - \cancel{1} - \cancel{x^2} - \cancel{x}h - \cancel{x} + \cancel{x} + h + \cancel{1}}{h(x+h+1)(x+1)} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2h}{h(x+h+1)(x+1)} = \lim_{h \to 0} \frac{2}{(x+h+1)(x+1)} = \frac{2}{(x+1)^2}$$

EJERCICIO

Comprueba que la función $y = |x-2|$ no es derivable en $x = 2$.

$$y = \begin{cases} -x+2 & \text{si } x < 2 \\ x-2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases} \qquad y' = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 2 \\ 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

La función es continua, pues: $\lim\limits_{x \to 2^-} (-x+2) = \lim\limits_{x \to 2^+} (x-2) = f(2) = 0$

Las derivadas laterales son: $f'(2^-) = -1 \neq f'(2^+) = 1$. Por tanto, no es derivable en $x = 2$.

EJERCICIO

Calcula los puntos de derivada nula de las siguientes funciones:

a) $y = \dfrac{x}{(x+3)^2}$ **b)** $y = \dfrac{16}{x^2(x-4)}$

c) $y = \dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$ **d)** $y = e^x(x-1)$

e) $y = x^2 e^x$ **f)** $y = sen\ x + cos\ x$

a) $y' = \dfrac{(x+3)^2 - 2(x+3)x}{(x+3)^4} = \dfrac{(x+3) - 2x}{(x+3)^3} = \dfrac{3-x}{(x+3)^3}$

$y' = 0 \ \rightarrow\ 3 - x = 0 \ \rightarrow\ x = 3 \ \rightarrow\ y = \dfrac{1}{12}$

Se anula en el punto $\left(3, \dfrac{1}{12}\right)$.

b) $y = \dfrac{16}{x^3 - 4x^2} \ \rightarrow\ y' = \dfrac{-16(3x^2 - 8x)}{(x^3 - 4x^2)^2}$

$y' = 0 \ \rightarrow\ 3x^2 - 8x = 0 \ \rightarrow\ x(3x - 8) = 0 \begin{cases} x = 0 \ \text{(no vale)} \\ x = \dfrac{8}{3} \ \rightarrow\ y = \dfrac{-27}{16} \end{cases}$

$x = 0$ no está en el dominio.

La derivada se anula en el punto $\left(\dfrac{8}{3}, \dfrac{-27}{16}\right)$.

c) $y' = \dfrac{(2x-1)(x^2+x+1) - (x^2-x+1)(2x+1)}{(x^2+x+1)^2} =$

$= \dfrac{\cancel{2x^3} + \cancel{2x^2} + \cancel{2x} - \cancel{x^2} - \cancel{x} - 1 - \cancel{2x^3} - \cancel{x^2} + \cancel{2x^2} + \cancel{x} - \cancel{2x} - 1}{(x^2+x+1)^2} = \dfrac{2x^2 - 2}{(x^2+x+1)^2}$

$y' = 0 \ \rightarrow\ 2x^2 - 2 = 0 \ \rightarrow\ x^2 = 1 \begin{cases} x = 1 \ \rightarrow\ y = \dfrac{1}{3} \\ x = -1 \ \rightarrow\ y = 3 \end{cases}$

Se anula en los puntos $(-1, 3)$ y $\left(1, \dfrac{1}{3}\right)$.

d) $y' = e^x(x-1) + e^x = e^x(x - 1 + 1) = xe^x$

$y' = 0 \ \rightarrow\ x = 0 \ \rightarrow\ y = -1$

Se anula en el punto $(0, -1)$.

e) $y' = 2x\,e^x + x^2 e^x = e^x(2x + x^2)$

$y' = 0 \ \rightarrow\ 2x + x^2 = 0 \ \rightarrow\ x(2 + x) = 0 \begin{cases} x = 0 \ \rightarrow\ y = 0 \\ x = -2 \ \rightarrow\ y = 4e^{-2} \end{cases}$

Se anula en los puntos $(0, 0)$ y $(-2, 4e^{-2})$.

f) $y' = cos\, x - sen\, x$

$$y' = 0 \;\rightarrow\; cos\, x = sen\, x \;\rightarrow\; tg\, x = 1 \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{4} + 2\pi k \;\rightarrow\; y = \sqrt{2} \\ x = \dfrac{5\pi}{4} + 2\pi k \;\rightarrow\; y = -\sqrt{2} \end{cases}$$

Se anula en los puntos $\left(\dfrac{\pi}{4} + 2\pi k,\ \sqrt{2}\right), \left(\dfrac{5\pi}{4} + 2\,\pi k,\ -\sqrt{2}\right)$, con $k \in \mathbb{Z}$.

<u>EJERCICIO</u>

Dada la función $f(x) = e^{sen\, x}$, halla: $f'(x)$, $f''(x)$ y $f'''(x)$.

$f'(x) = cos\, x\, e^{sen\, x}$

$f''(x) = -sen\, x\, e^{sen\, x} + cos^2 x\, e^{sen\, x} = (cos^2 x - sen\, x)\, e^{sen\, x}$

$f'''(x) = (2cos\, x(-sen\, x) - cos\, x)\, e^{sen\, x} + (cos^2 x - sen\, x)\, cos\, x\, e^{sen\, x} =$

$= (-2sen\, x\, cos\, x - cos\, x + cos^3 x - sen\, x\, cos\, x)\, e^{sen\, x} =$

$= (cos^3 x - 3sen\, x\, cos\, x - cos\, x)\, e^{sen\, x}$

EJERCICIO

Considera la función: $f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x + m & \text{si } x \leq 1 \\ -x^2 + nx & \text{si } x > 1 \end{cases}$

a) Calcula m y n para que f sea derivable en todo $\mathbb{R}$.

b) ¿En qué puntos es $f'(x) = 0$?

a) Para que sea derivable, en primer lugar ha de ser continua.

- **Si $x \neq 1$,** la función es continua, pues está formada por dos polinomios.
- **En $x = 1$:**

$$\left. \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} (x^2 - 5x + m) = -4 + m \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} (-x^2 + nx) = -1 + n \\ f(1) = -4 + m \end{array} \right\}$$

Para que sea continua en $x = 1$, ha de ser: $-4 + m = -1 + n$; es decir: $m = n + 3$.

Derivabilidad:

- **Si $x \neq 1$,** la función es derivable. Además:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 5 & \text{si } x < 1 \\ -2x + n & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

- **En $x = 1$:**

$$\left. \begin{array}{l} f'(1^-) = -3 \\ f'(1^+) = -2 + n \end{array} \right\}$$ Para que sea derivable en $x = 1$, ha de ser $-3 = -2 + n$, es decir, $n = -1$.

Por tanto, la función será derivable en todo $\mathbb{R}$ si $m = 2$ y $n = -1$. En este caso, la derivada sería:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 5 & \text{si } x < 1 \\ -2x - 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

b) $f'(x) = 2x - 5$ si $x < 1$

$$2x - 5 = 0 \quad \rightarrow \quad x = \frac{5}{2}; \text{ pero } \frac{5}{2} > 1$$

$f'(x) = -2x - 1$ si $x \geq 1$

$$-2x - 1 = 0 \quad \rightarrow \quad x = -\frac{1}{2}; \text{ pero } -\frac{1}{2} < 1$$

Por tanto, $f'(x)$ no se anula en ningún punto.

EJERCICIO

Determina el valor de k que hace que la función $f(x) = \dfrac{e^x}{x^2 + k}$ tenga un único punto de tangente horizontal.

$$f'(x) = \frac{e^x(x^2 + k) - 2xe^x}{(x^2 + k)^2} = \frac{(x^2 - 2x + k)\,e^x}{(x^2 + k)^2}$$

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; x^2 - 2x + k = 0 \;\rightarrow\; x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4k}}{2}$$

Para que haya una sola ecuación, ha de ser $4 - 4k = 0$; es decir, $k = 1$.

EJERCICIO

Dada la función $f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \le 0 \\ 1 - x & \text{si } x > 0 \end{cases}$ estudia si es continua y derivable en todo $\mathbb{R}$.

Continuidad:

- **En $x \neq 0$** $\rightarrow$ La función es continua, pues está formada por dos funciones continuas.

- **En $x = 0$:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} e^{-x} = 1 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} (1 - x) = 1 \\ f(0) = 1 \end{array}\right\} \lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0).$$

Por tanto, la función es continua en $x = 0$.

La función es continua en todo $\mathbb{R}$.

Derivabilidad:

- **Si $x \neq 0$** $\rightarrow$ La función es derivable. Además:

$$f'(x) = \begin{cases} -e^{-x} & \text{si } x < 0 \\ -1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

- **En $x = 0$:**

$f'(0^-) = -1 = f'(0^+)$

Por tanto, $f(x)$ es derivable en $x = 0$ y $f'(0) = -1$. La función es derivable en todo $\mathbb{R}$. Su derivada sería:

$$f'(x) = \begin{cases} -e^{-x} & \text{si } x < 0 \\ -1 & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$$

EJERCICIO

Calcula a y b para que la siguiente función sea derivable en todo $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 3x & \text{si } x \le 2 \\ x^2 - bx - 4 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Para que sea derivable, en primer lugar, ha de ser continua.

- **Si $x \neq 2$** $\rightarrow$ La función es continua, pues está formada por dos polinomios.
- **En $x = 2$:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} (ax^2 + 3x) = 4a + 6 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} (x^2 - bx - 4) = -2b \\ f(2) = 4a + 6 \end{array}\right\}$$

Para que sea continua, ha de ser $4a + 6 = -2b$, es decir, $2a + 3 = b$; o bien $b = -2a - 3$.

Derivabilidad:

- **Si $x \neq 2$** $\rightarrow$ la función es derivable. Además:

$$f'(x) = \begin{cases} 2ax + 3 & \text{si } x < 2 \\ 2x - b & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

- **En $x = 2$:**

$$\left.\begin{array}{l} f'(2^-) = 4a + 3 \\ f'(2^+) = 4 - b \end{array}\right\}$$ Para que sea derivable ha de ser $4a + 3 = 4 - b$, es decir, $b = -4a + 1$.

Teniendo en cuenta las dos condiciones obtenidas:

$$\left.\begin{array}{l} b = -2a - 3 \\ b = -4a + 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} -2a - 3 = -4a + 1 \rightarrow 2a = 4 \rightarrow a = 2 \\ b = -7 \end{array}$$

Por tanto, para que $f(x)$ sea derivable en todo $\mathbb{R}$, ha de ser $a = 2$ y $b = -7$.

EJERCICIO

Sea la función: $f(x) = x\,|x| = \begin{cases} -x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

a) Halla $f'(x)$.

b) Halla $f''(x)$.

c) Representa f' y f''.

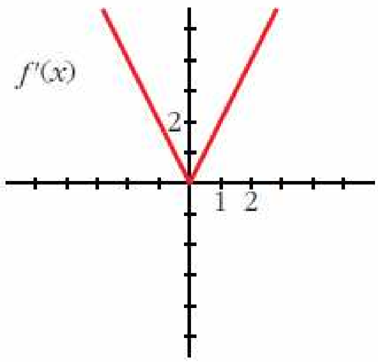
a) $f'(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x < 0 \\ 2x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

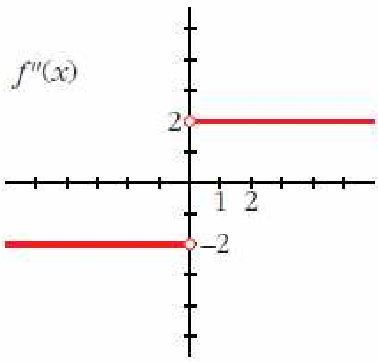
En $x = 0$ existe la derivada, pues $f(x)$ es continua, y, además, $f'(0^-) = f'(0^+)$.

b) $f''(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } x < 0 \\ 2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

En $x = 0$ no existe la segunda derivada, pues $f''(0^-) \neq f''(0^+)$.

c)





EJERCICIO

Estudia la derivabilidad de la función: $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$ **y calcula** $f'(1)$.

$f'(x) = \dfrac{-2}{3\sqrt[3]{x}}$

$f(x)$ es una función continua en $\mathbb{R}$.

$f(x)$ es derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$ (en $x = 0$ no existe la derivada).

$f'(1) = \dfrac{-2}{3}$

EJERCICIO

Calcula la derivada de orden n de la función $f(x) = e^{2x}$.

$f'(x) = 2e^{2x}$

$f''(x) = 4e^{2x} = 2^2e^{2x}$

$f'''(x) = 8e^{2x} = 2^3e^{2x}$

$\dots$

$f^n(x) = 2^n e^{2x}$

Lo demostramos por inducción:

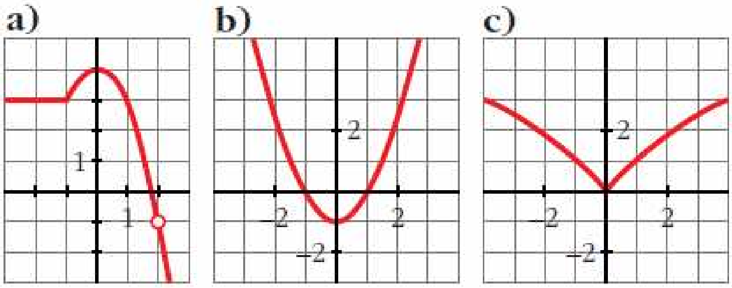
Para $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, vemos que se cumple.

Supongamos que es cierto para $n - 1$; es decir, que $f^{n-1}(x) = 2^{n-1}e^{2x}$; entonces, derivando, tenemos que: $f^n(x) = 2 \cdot 2^{n-1}e^{2x} = 2^n e^{2x}$. Por tanto, la expresión obtenida es cierta para todo n.

EJERCICIO

Observa las gráficas de las siguientes funciones e indica en qué puntos no son derivables.

¿Alguna de ellas es derivable en todo $\mathbb{R}$?



a) No es derivable en $x = -1$ (tiene un punto "anguloso") ni en $x = 2$ (no está definida la función).

b) Es derivable en todo $\mathbb{R}$.

c) No es derivable en $x = 0$ (tiene un punto "anguloso").

EJERCICIO

La función $f(x)$ está definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - x & \text{si } x \leq 0 \\ ax + b & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Calcula a y b para que f sea continua y derivable.

Continuidad:

- **En $x \neq 0$** $\rightarrow$ La función es continua, pues está formada por dos polinom
- **En $x = 0$:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} (x^3 - x) = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} (ax + b) = b \\ f(0) = 0 \end{array}\right\} \text{ Para que sea continua ha de ser } b = 0$$

Derivabilidad:

- **Si $x \neq 0$** $\rightarrow$ La función es derivable. Además:

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 1 & \text{si } x < 0 \\ a & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

- **En $x = 0$:**

$$\left.\begin{array}{l} f'(0^-) = -1 \\ f'(0^+) = a \end{array}\right\} \text{ Para que sea derivable, ha de ser } a = -1.$$

Por tanto, $f(x)$ será continua y derivable si $a = -1$ y $b = 0$.

EJERCICIO

Halla los puntos de derivada nula de la función $y = (3x - 2x^2)\, e^x$.

$$y' = (3 - 4x)e^x + (3x - 2x^2)e^x = (3 - 4x + 3x - 2x^2)e^x = (-2x^2 - x + 3)e^x$$

$$y' = 0 \rightarrow -2x^2 - x + 3 = 0 \rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{-4} = \frac{1 \pm 5}{-4} \begin{cases} x = \dfrac{-3}{2} \\ x = 1 \end{cases}$$

EJERCICIO

Determina, si es posible, el valor del parámetro a para que la función f sea derivable en todo su dominio de definición:

$$f(x) = \begin{cases} x \ln x & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ a(1 - e^{1-x}) & \text{si } 1 < x \end{cases}$$

Para que $f(x)$ sea derivable, en primer lugar, ha de ser continua.

- **Si $x > 0$, $x \neq 1$:** La función es continua, pues está formada por funciones continuas.
- **En $x = 1$:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} (x \ln x) = 0 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} [a(1 - e^{1-x})] = 0 \\ f(1) = 0 \end{array}\right\} \quad f(x) \text{ es continua en } x = 0.$$

Derivabilidad

- **Si $x > 0$, $x \neq 1$:** es derivable. Además:

$$f'(x) = \begin{cases} \ln x + 1 & \text{si } 0 < x < 1 \\ ae^{1-x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

- **En $x = 1$:**

$$\left.\begin{array}{l} f'(1^-) = 1 \\ f'(1^+) = a \end{array}\right\} \quad f(x) \text{ es derivable en } x = 1 \text{ si } a = 1.$$

Luego, para que f sea derivable en todo su dominio de definición, ha de ser $a = 1$.