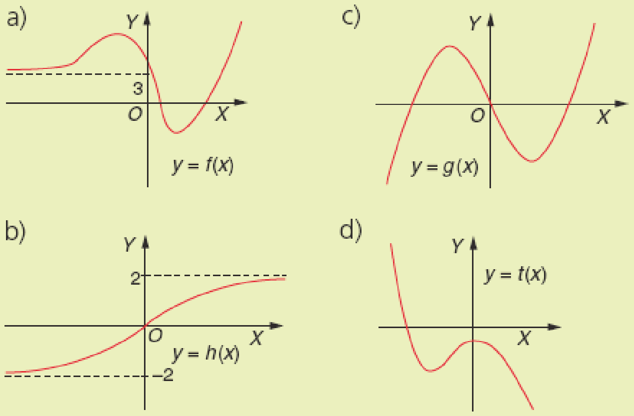
Unidad 11 – Límites de funciones. Continuidad

PÁGINA 247

cuestiones iniciales

1. Comenta la tendencia de las siguientes funciones:



SOLUCIONES

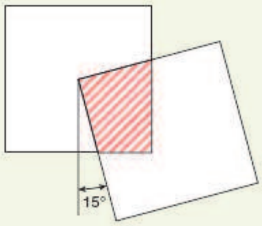
1. Podemos decir lo siguiente:

- $f(x)$ tiende a (3) cuando x tiende a $(-\infty)$ y tiende a $(+\infty)$ cuando x tiende a $(+\infty)$.
- $g(x)$ tiende a $(-\infty)$ cuando x tiende a $(-\infty)$ y tiende a $(+\infty)$ cuando x tiende a $(+\infty)$.
- $h(x)$ tiende a (-2) cuando x tiende a $(-\infty)$ y tiende a (2) cuando x tiende a $(+\infty)$.
- $t(x)$ tiende a $(+\infty)$ cuando x tiende a $(-\infty)$ y tiende a $(-\infty)$ cuando x tiende a $(+\infty)$.

PÁGINA 263

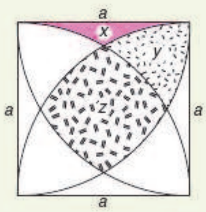
ACTIVIDADES

■ Practica esta estrategia en la resolución de los siguientes problemas:



1. Cuadrados. Un cuadrado tiene uno de sus vértices en el centro de otro cuadrado del mismo lado que el anterior, como se muestra en la figura. ¿Cuánto vale el área de la región limitada por ambos?

2. Rosa de cuatro pétalos. La figura adjunta muestra una rosa de 4 pétalos, y corresponde al símbolo de una asociación. Esta asociación ha convocado un concurso que consiste en calcular el área de la rosa tomando una sola medida sobre ella. ¿Ganarías tú el concurso?

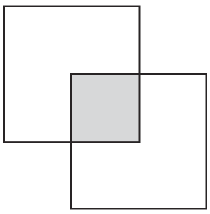


3. Cuadrado. En el cuadrado de la figura de lado, a, se han trazado arcos de circunferencia con centro en cada uno de los vértices del cuadrado y radio a. Halla el área de cada una de las regiones x, y, z.

4. Dos cuadrados separados. Los cuadrados de la figura tienen 10 m de lado. Calcula el área de las zonas sombreadas.

SOLUCIONES

1. La solución queda:

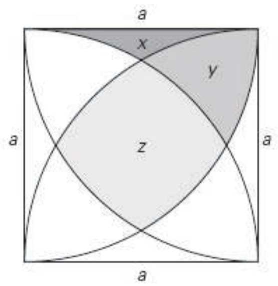


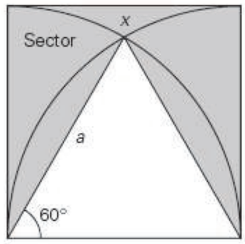
Basta con mover el cuadrado para ver que el área de la región limitada es la cuarta parte del cuadrado.

2. Basta conocer el lado del cuadrado que se forma dentro de la figura. La resolución nos recuerda al problema de los *perros guardianes*.

   El área de esta rosa de 4 pétalos es igual al área del cuadrado rayado más 4 veces el área de un pétalo. El área de un pétalo lo puedes encontrar en el problema de los *perros guardianes*.

3. La representación geométrica del problema así como su resolución quedan:

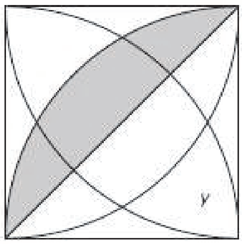




Los cálculos quedan:

$$\text{Área}(x) = \text{Área cuadrado} - \text{Área triángulo} - 2\cdot\text{Área sector} =$$

$$= a^2 - \frac{a\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}}{2} - 2\cdot\frac{\pi\cdot a^2}{12} = \boxed{a^2\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{6}\right)}$$



$$\text{Área}(\text{rayada}) = \frac{1}{4}\,\text{Área círculo} - \text{Área triángulo rectángulo} =$$

$$= \frac{\pi\cdot a^2}{4} - \frac{a^2}{2} = \frac{a^2}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$$

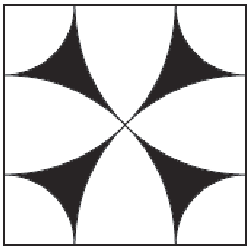
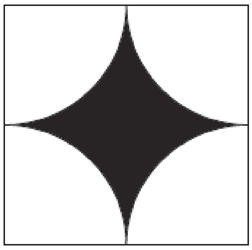
$$\text{Área}(y) = \text{Área triángulo rectángulo} - \text{Área}(\text{rayada}) - 2\cdot\text{Área}(x) =$$

$$= \frac{a^2}{2} - \left(\frac{\pi\cdot a^2}{4} - \frac{a^2}{2}\right) - 2\cdot a^2\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{6}\right) = \boxed{-a^2 + \frac{a^2\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi\cdot a^2}{12}}$$

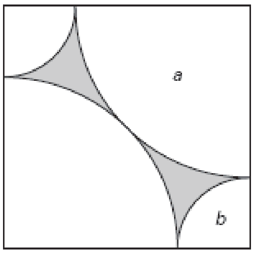
$$\text{Área}(z) = 2\cdot\text{Área}(\text{rayada}) - 2\cdot\text{Área}(y) = 2\cdot\left(\frac{\pi\cdot a^2}{4} - \frac{a^2}{2}\right) - 2\cdot\left(-a^2 + \frac{a^2\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi\cdot a^2}{12}\right) =$$

$$= \frac{\pi\cdot a^2}{2} - a^2 + 2a^2 - a^2\sqrt{3} - \frac{\pi\cdot a^2}{6} = \boxed{a^2 - a^2\sqrt{3} + \frac{\pi\cdot a^2}{3}}$$

4. Sean las figuras:

1)  2) 

- En la figura (1) el área pedida es 2 veces el área de una de las aspas rayada en el dibujo adjunto.



$$\text{Área aspa} = \text{Área cuadrado} - 2 \cdot \text{Área}(a) - 2 \cdot \text{Área}(b)$$

Vamos a hallar el área de la zona (a).
El radio de esta zona es la mitad de la diagonal del cuadrado.

$$D = \sqrt{10^2 + 10^2} = 10\sqrt{2} \Rightarrow r = 5\sqrt{2} \quad \text{y} \quad \text{Área(a)} = \frac{1}{4}\pi \cdot r^2 = \frac{1}{4}\pi \cdot \left(5\sqrt{2}\right)^2 = \frac{50\pi}{4} = \frac{25\pi}{2}\,\text{m}^2$$

Ahora hallamos el área de la zona (b). El radio de esta zona es el lado del cuadrado menos el radio de la zona (a) $\Rightarrow r = 10 - 5\sqrt{2}.$

$$\text{Área(b)} = \frac{1}{4}\pi(10 - 5\sqrt{2})^2 = \frac{(75 - 50\sqrt{2})\pi}{4}\,\text{m}^2$$

El área del aspa queda:

$$\text{Área aspa} = 10^2 - 25\pi - (75 - 50\sqrt{2})\pi = 100 - 100\pi + 50\sqrt{2}\pi$$

El área pedida queda:

$$\text{Área pedida} = 2 \cdot \text{Área aspa} = 2 \cdot (100 - 100\pi + 50\sqrt{2}\pi) = 15{,}97\,\text{m}^2$$

$$\boxed{\text{Área pedida} = 15{,}97\,\text{m}^2}$$

- En la figura (2) el área pedida es igual al área del cuadrado de lado 10 m menos el área del círculo de radio 5 m.

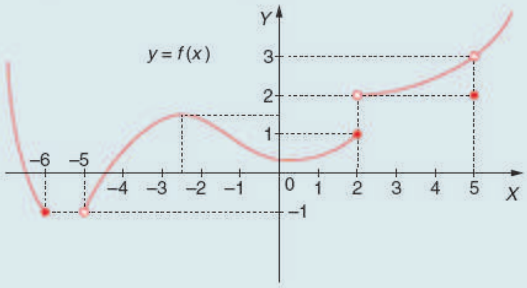
$$\text{Área figura(2)} = 10^2 - \pi \cdot 5^2 = 100 - 25\pi \Rightarrow \boxed{\text{Área figura(2)} = 21{,}46\,\text{m}^2}$$

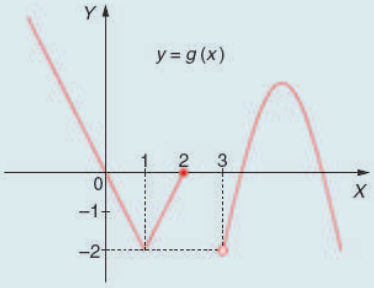
PÁGINA 266

ACTIVIDADES FINALES

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. En las siguientes funciones, cuyas gráficas se dan, calcula los valores pedidos:





a) $f(2)$

b) $\lim\limits_{x\to -5^-} f(x)$

c) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$

d) $\lim\limits_{x\to 5^+} f(x)$

e) $f(5)$

f) $\lim\limits_{x\to -5^+} f(x)$

g) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$

h) $\lim\limits_{x\to -2,5^+} f(x)$

i) $f(-5)$

j) $\lim\limits_{x\to -6^-} f(x)$

k) $\lim\limits_{x\to 5^-} f(x)$

l) $\lim\limits_{x\to -2,5} f(x)$

m) $g(1)$

n) $\lim\limits_{x\to 1} g(x)$

o) $\lim\limits_{x\to 3^+} g(x)$

p) $g(2)$

q) $\lim\limits_{x\to 2^-} g(x)$

r) $\lim\limits_{x\to 3^-} g(x)$

s) $g(2,5)$

t) $\lim\limits_{x\to 2^+} g(x)$

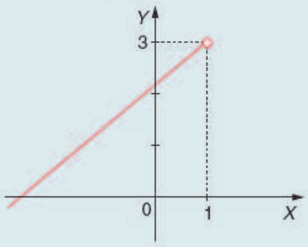
u) $\lim\limits_{x\to 3} g(x)$

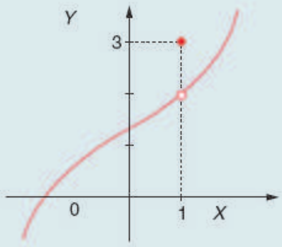
2. Identifica cada una de las tres expresiones siguientes con su gráfica correspondiente:

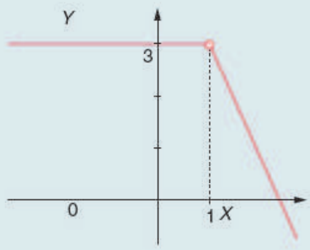
a) $\nexists \lim\limits_{x\to 1^+} g(x) = 3$

b) $\lim\limits_{x\to 1} g(x) = 3$

c) $g(1) = 3$







3. Representa gráficamente funciones que satisfagan las siguientes condiciones:

a) $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = -2$; $f(2) = 5$; Dom $f = \mathbb{R}$; Im $f = (-2, +\infty)$

b) $\lim\limits_{x\to 1} g(x) = 4$; $g(x)$ estrictamente creciente en $(-\infty, 1)$; Im $g = (-\infty, 4]$

c) $\lim\limits_{x\to 2^-} h(x) = 3$; $\lim\limits_{x\to 2^+} h(x) = 5$; $h(2) = 3$; Dom $h = [0, 3]$

d) $\lim\limits_{x\to -1} t(x) = \lim\limits_{x\to 0} t(x) = \lim\limits_{x\to 1} t(x)$

e) $l(x) > 0 \quad \forall x > 2$; $l(x) \leq 0 \quad \forall x < 2$; $\nexists \lim\limits_{x\to 2} l(x)$

f) Dom $j = \mathbb{R} - (2, 3]$; Im $j = \mathbb{R}$; $\lim\limits_{x\to 2^-} j(x) = 0$; $\lim\limits_{x\to 3^+} j(x) = -2$; $j(0) = 0$

1. Las soluciones quedan:

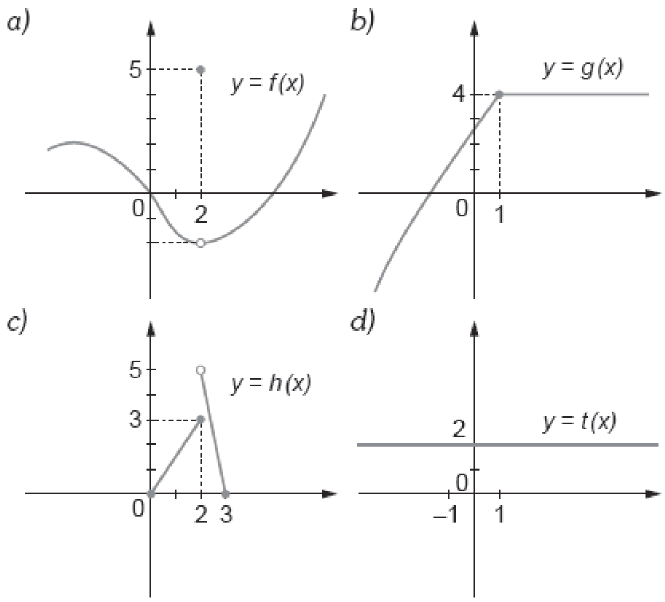
- $f(2)=1$; $f(5)=2$; $f(-5)$ no definida;
  $f(-6)=-1$; $\lim\limits_{x \to -5^-} f(x)$ no existe;
  $\lim\limits_{x \to -5^+} f(x)=-1$; $\lim\limits_{x \to -6^-} f(x)=-1$;
  $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)=2$; $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)=1$;
  $\lim\limits_{x \to 5^-} f(x)=3$; $\lim\limits_{x \to 5^+} f(x)=3$;
  $\lim\limits_{x \to -2,5^+} f(x)=1,5$; $\lim\limits_{x \to -2,5} f(x)=1,5$

- $g(1)=-2$; $g(2)=0$; $g(2,5)$ no existe;
  $g(3)$ no existe; $\lim\limits_{x \to 1} g(x)=-2$;
  $\lim\limits_{x \to 2^-} g(x)=0$; $\lim\limits_{x \to 2^+} g(x)$ no existe;
  $\lim\limits_{x \to 3^+} g(x)=-2$; $\lim\limits_{x \to 3^-} g(x)$ no existe;
  $\lim\limits_{x \to 3} g(x)$ no existe

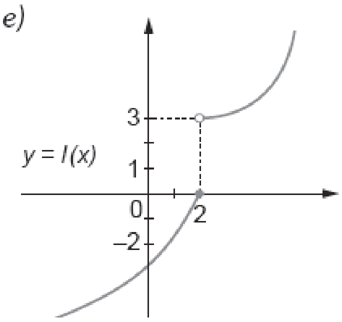
2. Las correspondencias quedan:

a) $\nexists \lim\limits_{x \to 1^+} g(x) = 3$ b) $g(1) = 3$ c) $\lim\limits_{x \to 1} g(x) = 3$

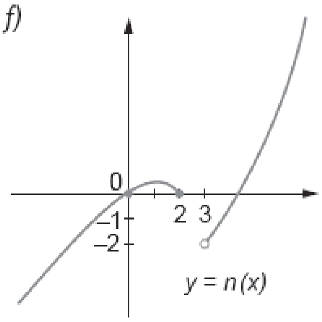
3. Las gráficas quedan:



e)

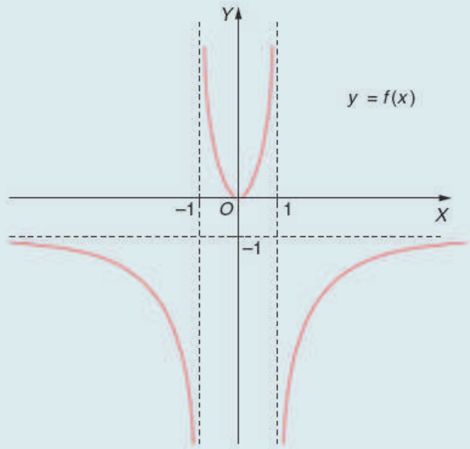


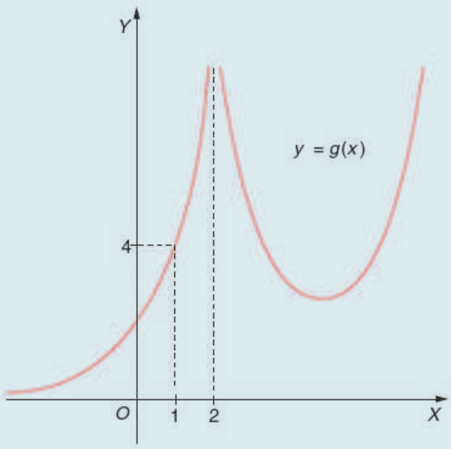
f)



PÁGINA 267

4. En las siguientes funciones, cuyas gráficas se dan, calcula los valores pedidos:





a) $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x)$

b) $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

d) Ecuaciones de las asíntotas horizontales y verticales, si es que existen

e) $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x)$

f) $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$

g) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

h) $\lim\limits_{x \to 2^-} g(x)$

i) $\lim\limits_{x \to 2} g(x)$

j) $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$

k) Ecuaciones de las asíntotas horizontales y verticales, si es que existen

l) $\lim\limits_{x \to 2^+} g(x)$

m) $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$

n) $\lim\limits_{x \to 1} g(x)$

5. Representa gráficamente funciones que satisfagan las siguientes condiciones:

a) Asíntota vertical en $x = -2$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$

b) $\lim\limits_{x \to 1} g(x) = 1$; $\lim\limits_{x \to 3^+} g(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 3^-} g(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$

c) $h(-4) = 2$; $\lim\limits_{x \to -2^-} h(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to -2^+} h(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to 2^-} h(x) = 2$; $\lim\limits_{x \to 2^+} h(x) = -1$

d) $t(0) = 1$; $\lim\limits_{x \to 0^+} t(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 2} t(x) = 2$; $\lim\limits_{x \to 3^-} t(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} t(x) = +\infty$

6. Calcula los límites siguientes:

a) $\lim\limits_{x \to 0} 2$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{-5}$

c) $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{1}{x^2}$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} x^5$

e) $\lim\limits_{x \to -\infty} (-7)$

f) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x^{10}}$

g) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^{10}}$

h) $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x^{13}}$

i) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^{13}}$

j) $\lim\limits_{x \to -1} x^6$

k) $\lim\limits_{x \to 0^-} x^3$

l) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^6}$

m) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x^7}$

n) $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x^7}$

o) $\lim\limits_{x \to -\infty} x^6$

p) $\lim\limits_{x \to 1} x$

4. Las respuestas quedan:

a) $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = -\infty$

b) $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -1$

d) Asíntota horizontal: $y = -1$.
Asíntotas verticales: $x = -1$; $x = 1$.

e) $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = +\infty$

f) $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = -\infty$

g) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1$

h) $\lim\limits_{x \to 2^-} g(x) = +\infty$

i) $\lim\limits_{x \to 2} g(x) = +\infty$

j) $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$

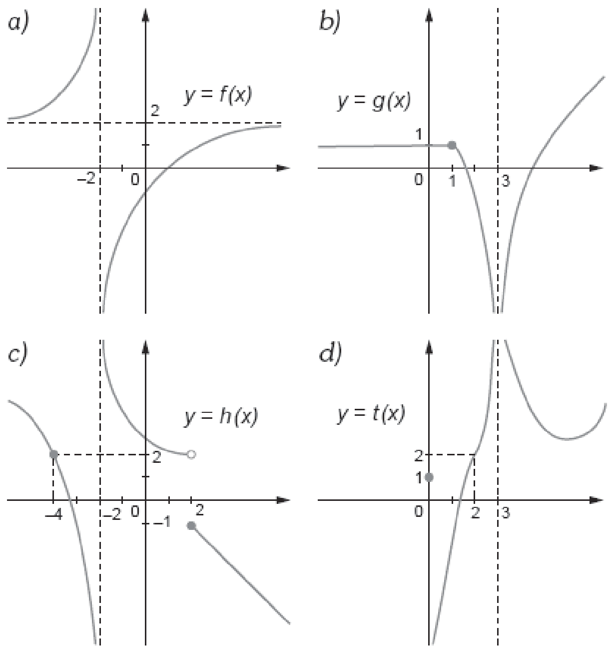
k) Asíntota horizontal: $y = 0$.
Asíntota vertical: $x = 2$.

l) $\lim\limits_{x \to 2^+} g(x) = +\infty$

m) $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = 0$

n) $\lim\limits_{x \to 1} g(x) = 4$

5. Las representaciones quedan:



6. Los resultados son:

a) $\lim\limits_{x \to 0} 2 = 2$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{-5} = 0$

c) $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{1}{9}$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} x^5 = -\infty$

e) $\lim\limits_{x \to -\infty} (-7) = -7$

f) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x^{10}} = +\infty$

g) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^{10}} = 0$

h) $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x^{13}} = -\infty$

i) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^{13}} = 0$

j) $\lim\limits_{x \to -1} x^6 = +1$

k) $\lim\limits_{x \to 0^-} x^3 = 0$

l) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^6} = +\infty$

m) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x^7} = +\infty$

n) $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x^7} = -\infty$

o) $\lim\limits_{x \to -\infty} x^6 = +\infty$

p) $\lim\limits_{x \to 1} x = 1$

PÁGINA 268

ACTIVIDADES FINALES

7. Se da la función:

$$f(x) = \begin{cases} 2x-1 & \text{si} \quad x<-1 \\ -3 & \text{si} \quad -1 \le x < 2 \\ x+1 & \text{si} \quad x \ge 2 \end{cases}$$

Calcula:

a) $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x)$ b) $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x)$ c) $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$ d) $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$ e) $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$ f) $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ g) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ h) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

Comprueba los resultados obtenidos por medio de la gráfica.

8. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} (2x^3 - 7x + 2)$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2}{3x^2 - 5x + 2}$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} (4x^4 - 7x + 5)$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} (-3x^5 + 2x - 4)$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} (-x^2 + 3x - 2)$

f) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2 - 7x + 5}{-2x^2 + 4x - 3}$

g) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 + 7}}{2x}$

h) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x^4 - 3x^2 + 2}}{\sqrt[3]{4x^2 + 5}}$

i) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x} + 3}{\sqrt{2x} - 5}$

j) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3x^5 - 2x + 1}{7x^4 - 2x^2}$

k) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-x^2 - 5x + 1}{2x^3 - 3}$

l) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-2}{1 - x^3}$

9. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^3 - 1}{x^3 + 2x^2 - 3x}$

b) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{x^2 + x}{x^3 - 2x^2 + x}$

c) $\lim\limits_{x\to3} \dfrac{x^2 - 9}{5x^2 - 13x - 6}$

d) $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{x^4 - 1}{x^3 + 1}$

e) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{x^4 - 3x^2}{x^2 + x}$

f) $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4x + 4}$

g) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sqrt{1 - x} - 1}{2x}$

h) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^2 - 1}{\sqrt{x} - 1}$

i) $\lim\limits_{x\to3} \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{3}}{x^2 - 9}$

j) $\lim\limits_{x\to4} \dfrac{3 - \sqrt{5 + x}}{2 - \sqrt{8 - x}}$

k) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sqrt{2 - x} - \sqrt{2 + x}}{x^2 + x}$

l) $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{\sqrt{x + 2} - 2}{\sqrt{2x} - 2}$

10. Calcula el siguiente límite $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{f(x) - f(2)}{x - 2}$, siendo $f(x) = 2x^2 + 1$.

11. Calcula los límites siguientes:

a) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^2 + 1}{x - 1}$

b) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{2 + x}{x^2}$

c) $\lim\limits_{x\to3} \dfrac{x + 5}{|x - 3|}$

d) $\lim\limits_{x\to0} \left(\dfrac{2}{x^3} \cdot \dfrac{x^2 + 2x}{3} \right)$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{2}{x + 1} \cdot \sqrt{x^2 + 1} \right)$

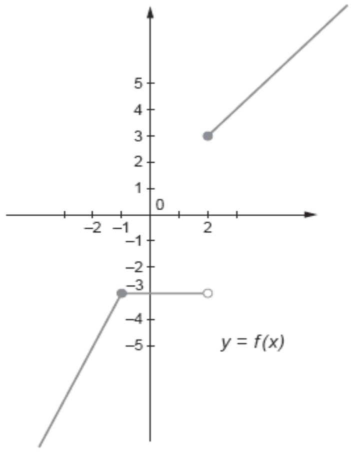
f) $\lim\limits_{x\to0} \left[\dfrac{1}{x^2} \left(\dfrac{1}{x + 2} - \dfrac{1}{x^2 + 2} \right) \right]$

7. Los límites y la gráfica quedan:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-}(2x-1)=-3\\ \lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}(-3)=-3\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to -1} f(x)=-3$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(-3)=-3\\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}(x+1)=3\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to 2} f(x)\text{ no existe}$$

$$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=-\infty;\qquad \lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$$



8. Los límites quedan:

a) $\lim\limits_{x\to +\infty}[2x^3-7x+2]=+\infty$

b) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{2}{3x^2-5x+2}=0$

c) $\lim\limits_{x\to -\infty}[4x^4-7x+5]=+\infty$

d) $\lim\limits_{x\to -\infty}[-3x^5+2x-4]=+\infty$

e) $\lim\limits_{x\to +\infty}[-x^2+3x-2]=-\infty$

f) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2x^2-7x+5}{-2x^2+4x-3}=-1$

g) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+7}}{2x}=\dfrac{1}{2}$

h) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^4-3x^2+2}}{\sqrt[3]{4x^2+5}}=+\infty$

i) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{2x}-5}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

j) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{3x^5-2x+1}{7x^4-2x^2}=-\infty$

k) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{-x^2-5x+1}{2x^3-3}=0$

l) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{-2}{1-x^3}=0$

9. Los límites quedan:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x^3+2x^2-3x}\boxed{\frac{0}{0}}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x^2+x+1)}{x(x-1)(x+3)}=\dfrac{3}{4}$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+x}{x^3-2x^2+x}\boxed{\frac{0}{0}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(x+1)}{x(x^2-2x+1)}=1$

c) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{5x^2-13x-6}\boxed{\frac{0}{0}}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-3)(x+3)}{(x-3)(5x+2)}=\dfrac{6}{17}$

d) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^4-1}{x^3+1}\boxed{\frac{0}{0}}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x+1)(x-1)(x^2+1)}{(x+1)(x^2-x+1)}=\dfrac{-4}{3}$

e) $$\lim_{x\to 0}\frac{x^4-3x^2}{x^2+x}\boxed{\frac{0}{0}}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\,(x^2-3)}{x\,(x+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{x\,(x^2-3)}{x+1}=0$$

f) $$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-4x+4}\boxed{\frac{0}{0}}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)\,(x-3)}{(x-2)^2}=-\infty$$

g) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x}-1}{2x}\boxed{\frac{0}{0}}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1-x}-1)\,(\sqrt{1-x}+1)}{2x\,(\sqrt{1-x}+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{1-x-1}{2x\,(\sqrt{1-x}+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{-1}{2\,(\sqrt{1-x}+1)}=\frac{-1}{4}$$

h) $$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{\sqrt{x}-1}\boxed{\frac{0}{0}}=\lim_{x\to 1}\frac{(x^2-1)\,(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)\,(\sqrt{x}+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x^2-1)\,(\sqrt{x}+1)}{x-1}\boxed{\frac{0}{0}}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\,(x+1)\,(\sqrt{x}+1)}{x-1}=4$$

i) $$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x^2-9}\boxed{\frac{0}{0}}=\lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{3})\,(\sqrt{x}+\sqrt{3})}{(x^2-9)\,(\sqrt{x}+\sqrt{3})}=\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{(x^2-9)\,(\sqrt{x}+\sqrt{3})}\boxed{\frac{0}{0}}$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{(x-3)\,(x+3)\,(\sqrt{x}+\sqrt{3})}=\frac{1}{12\sqrt{3}}$$

j) $$\lim_{x\to 4}\frac{3-\sqrt{5+x}}{2-\sqrt{8-x}}\boxed{\frac{0}{0}}=\lim_{x\to 4}\frac{(3-\sqrt{5+x})\,(3+\sqrt{5+x})\,(2+\sqrt{8-x})}{(2-\sqrt{8-x})\,(2+\sqrt{8-x})\,(3+\sqrt{5+x})}=\lim_{x\to 4}\frac{(4-x)\,(2+\sqrt{8-x})}{(x-4)\,(3+\sqrt{5+x})}=-\frac{4}{6}=-\frac{2}{3}$$

k) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2-x}-\sqrt{2+x}}{x^2+x}\boxed{\frac{0}{0}}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{2-x}-\sqrt{2+x})\,(\sqrt{2-x}+\sqrt{2+x})}{(x^2+x)\,(\sqrt{2-x}+\sqrt{2+x})}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-2x}{(x^2+x)\,(\sqrt{2-x}+\sqrt{2+x})}\boxed{\frac{0}{0}}=\lim_{x\to 0}\frac{-2x}{x\,(x+1)\,(\sqrt{2-x}+\sqrt{2+x})}=\frac{-\sqrt{2}}{2}$$

l) $$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{2x}-2}\boxed{\frac{0}{0}}=\lim_{x\to 2}\frac{(\sqrt{x+2}-2)\,(\sqrt{x+2}+2)\,(\sqrt{2x}+2)}{(\sqrt{2x}-2)\,(\sqrt{2x}+2)\,(\sqrt{x+2}+2)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)\,(\sqrt{2x}+2)}{(2x-4)\,(\sqrt{x+2}+2)}\boxed{\frac{0}{0}}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)\,(\sqrt{2x}+2)}{2\,(x-2)\,(\sqrt{x+2}+2)}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$$

10. El límite queda:

Si $f(x)=2x^2+1 \Rightarrow f(2)=2\cdot 2^2+1=9 \Rightarrow \lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(2x^2+1)-9}{x-2}=$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{2x^2-8}{x-2}\boxed{\frac{0}{0}}=\lim_{x\to 2}\frac{2\,(x-2)\,(x+2)}{x-2}=8$$

11. Los límites quedan:

a) $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{x^2+1}{x-1} = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x^2+1}{x-1} = +\infty \Rightarrow \nexists \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2+1}{x-1}$

b) $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{2+x}{x^2} = +\infty$; $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{2+x}{x^2} = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2+x}{x^2} = +\infty$

c) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x+5}{|x-3|} = +\infty$

d) $\lim\limits_{x \to 0} \left[\dfrac{2}{x^3} \cdot \dfrac{x^2+2x}{3} \right] \boxed{\infty \cdot 0} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2\,(x^2+2x)}{3x^3} \boxed{\tfrac{0}{0}} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2 \cdot x\,(x+2)}{3x^3} = +\infty$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\dfrac{2}{x+1} \cdot \sqrt{x^2+1} \right] \boxed{\infty \cdot 0} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2\sqrt{x^2+1}}{x+1} \boxed{\tfrac{\infty}{\infty}} = 2$

f) $\lim\limits_{x \to 0} \left[\dfrac{1}{x^2} \left(\dfrac{1}{x+2} - \dfrac{1}{x^2+2} \right) \right] \boxed{\infty \cdot 0} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2-x}{x^2\,(x+2)\,(x^2+2)} \boxed{\tfrac{0}{0}} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x\,(x-1)}{x^2\,(x+2)\,(x^2+2)} \to$ no existe

12. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\sqrt{9x^2 + 2x - 3} - 3x\right)$ b) $\lim\limits_{x \to \infty} \left[\sqrt{x}\left(\sqrt{x+3} - \sqrt{x}\right)\right]$ c) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{x^2+2}{x+1} - \dfrac{x^2+1}{x}\right)$

13. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{5x-2}{5x+3}\right)^{3x}$ d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{5}{2x}\right)^{x^2}$ g) $\lim\limits_{x \to 0} (1+3x)^{\frac{2}{x}}$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{2x-7}{2x}\right)^{\frac{3x^2+1}{2x}}$ e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{2x^2-6x}{2x^2-x-5}\right)^{\frac{x^2}{2}}$ h) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{x^2+1}{x+1}\right)^{\frac{x^2+3}{x-1}}$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{3x}{x+5}\right)^{4x}$ f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{4-3x}{5-3x}\right)^{x-3}$ i) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{4x^2-2}{2x^2+1}\right)^{x+3}$

14. Halla los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{4-(x+2)^2}{x^3}$ d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{\dfrac{x-2}{x+5}}\right)^{x}$ g) $\lim\limits_{x \to 3} (x-2)^{\frac{5}{x^2-9}}$

b) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{3}{x^3-1}\right)$ e) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}$ h) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^4-x^3} - \sqrt{x^4-1}}$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{2x^2+5}{3x^2-5}\right)^{x+2}$ f) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{|x-2|}{x-2}$

15. Calcula a y b, para que $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(ax + b - \dfrac{x^2+2}{x+2}\right) = 0$.

16. Dada la funciún $f(x) = \sqrt{2x+3}$, calcula:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

17. Calcula el valor de a que haga cierta la siguiente igualdad:

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{3+5x^2}{3x+5x^2}\right)^{ax} = e^6$$

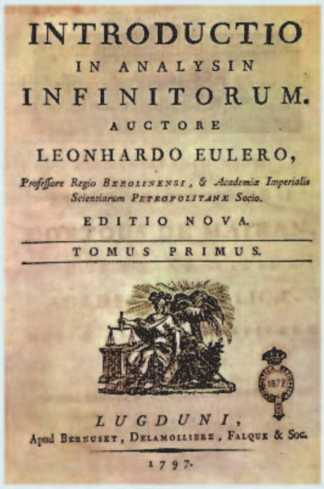
18. Se da la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2+1 & \text{si} \quad x < 0 \\ 3-3x & \text{si} \quad 0 \le x < 3 \\ -2x & \text{si} \quad x \ge 3 \end{cases}$$

Calcula:

a) $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$ b) $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ c) $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ d) $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ e) $f(0)$ f) $f(1)$ g) $f(3)$

A la vista de los resultados obtenidos estudia la continuidad de la función.


INTRODUCTIO
IN ANALYSIN
INFINITORUM.
AUCTORE
LEONHARDO EULERO,
Professore Regio Berolinensi, & Academiæ Imperialis Scientiarum Petropolitanæ Socio.
EDITIO NOVA.
TOMUS PRIMUS.
LUGDUNI,
Apud Bernuset, Delamolliere, Falque & Soc.
1797.

↑ Portada de la obra de Leonhard Euler (1707-1783), significativa para la evolución del análisis matemático.

12. Los límites quedan:

a) $$\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{9x^2+2x-3}-3x\right]\boxed{\infty-\infty}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{9x^2+2x-3}-3x\right)\left(\sqrt{9x^2+2x-3}+3x\right)}{\left(\sqrt{9x^2+2x-3}+3x\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-3}{\sqrt{9x^2+2x-3}+3x}\boxed{\frac{\infty}{\infty}}=\frac{2}{\sqrt{9}+3}=\frac{1}{3}$$

b) $$\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x}\left[\sqrt{x+3}-\sqrt{x}\right]\right]=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+3x}-x\boxed{\infty-\infty}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+3x}-x\right)\left(\sqrt{x^2+3x}+x\right)}{\sqrt{x^2+3x}+x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x}{\sqrt{x^2+3x}+x}\boxed{\frac{\infty}{\infty}}=\frac{3}{2}$$

c) $$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2+2}{x+1}-\frac{x^2+1}{x}\right]\boxed{\infty-\infty}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\,(x^2+2)-(x+1)\,(x^2+1)}{x\,(x+1)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^2+x-1}{x^2+x}\boxed{\frac{\infty}{\infty}}=-1$$

13. Los límites quedan:

a) $$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{5x-2}{5x+3}\right]^{3x}\boxed{1^{\infty}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}3x\left(\frac{5x-2}{5x+3}-1\right)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-15x}{5x+3}}=e^{-3}$$

b) $$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{2x-7}{2x}\right]^{\frac{3x^2+1}{2x}}\boxed{1^{\infty}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x^2+1}{2x}\left(\frac{2x-7}{2x}-1\right)}=e^{-\frac{21}{4}}$$

c) $$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{3x}{x+5}\right]^{4x}=+\infty$$

d) $$\lim_{x\to+\infty}\left[1+\frac{5}{2x}\right]^{x^2}\boxed{1^{\infty}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\left(1+\frac{5}{2x}-1\right)}=e^{+\infty}=+\infty$$

e) $$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{2x^2-6x}{2x^2-x-5}\right]^{\frac{x^2}{2}}\boxed{1^{\infty}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{2}\left(\frac{2x^2-6x}{2x^2-x-5}-1\right)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-5x^3+5x^2}{4x^2-2x-10}}=e^{-\infty}=0$$

f) $$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{4-3x}{5-3x}\right]^{x-3}\boxed{1^{\infty}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}(x-3)\left(\frac{4-3x}{5-3x}-1\right)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-x+3}{5-3x}}=e^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{e}$$

$$\text{g) } \lim_{x \to 0} [1+3x]^{\frac{2}{x}} \boxed{1^{\infty}} = e^{\lim\limits_{x \to 0} \frac{2}{x}(1+3x-1)} = e^{\lim\limits_{x \to 0} \frac{6x}{x}} = e^{6}$$

$$\text{h) } \lim_{x \to 1} \left[\frac{x^2+1}{x+1}\right]^{\frac{x^2+3}{x-1}} \boxed{1^{\infty}} = e^{\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2+3}{x-1}\left(\frac{x^2+1}{x+1}-1\right)} = e^{\lim\limits_{x \to 1} \frac{(x^2+3)(x^2-x)}{(x-1)(x+1)}} = e^{\lim\limits_{x \to 1} \frac{(x^2+3)\cdot x \cdot (x-1)}{(x-1)(x+1)}} = e^{2}$$

$$\text{i) } \lim_{x \to -\infty} \left[\frac{4x^2-2}{2x^2+1}\right]^{x+3} = 2^{-\infty} = 0$$

14. Los límites quedan:

$$\text{a) } \lim_{x \to 0} \frac{4-(x+2)^2}{x^3} \boxed{\tfrac{0}{0}} = \lim_{x \to 0} \frac{-x^2-4x}{x^3} \boxed{\tfrac{0}{0}} = \lim_{x \to 0} \frac{-x-4}{x^2} = -\infty$$

$$\text{b) } \lim_{x \to 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{3}{x^3-1}\right) = \lim_{x \to 1} \frac{x^2+x+1-3}{x^3-1} = \lim_{x \to 1} \frac{x^2+x-2}{x^3-1} \boxed{\tfrac{0}{0}} = \lim_{x \to 1} \frac{x+2}{x^2+x+1} = 1$$

$$\text{c) } \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2x^2+5}{3x^2-5}\right)^{x+2} = 0$$

$$\text{d) } \lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{\frac{x-2}{x+5}}\right)^{x} = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x-2}{x+5}\right)^{\frac{x}{2}} \boxed{1^{\infty}} = e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{x-2}{x+5}-1\right)\cdot\frac{x}{2}} = e^{-7/2}$$

$$\text{e) } \lim_{x \to 4} \frac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}} \boxed{\tfrac{0}{0}} = \lim_{x \to 4} \frac{\left(3^2-\left(\sqrt{5+x}\right)^2\right)\left(1+\sqrt{5-x}\right)}{\left(1^2-\left(\sqrt{5-x}\right)^2\right)\left(3+\sqrt{5+x}\right)} = \lim_{x \to 4} \frac{(4-x)\left(1+\sqrt{5-x}\right)}{(x-4)\left(3+\sqrt{5+x}\right)} = -\frac{1}{3}$$

$$\text{f) } \lim_{x \to 2} \frac{|x-2|}{x-2} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x-2}{x-2} = 1 \\ \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{-x+2}{x-2} = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow \nexists \lim_{x \to 2} \frac{|x-2|}{x-2}$$

$$\text{g) } \lim_{x \to 3} (x-2)^{\frac{5}{x^2-9}} \boxed{1^{\infty}} = e^{\lim\limits_{x \to +\infty} (x-2-1)\cdot\frac{5}{x^2-9}} = e^{5/6}$$

$$\text{h) } \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^4-x^3}-\sqrt{x^4-1}} \boxed{\infty-\infty} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x\left(\sqrt{x^4-x^3}+\sqrt{x^4-1}\right)}{1-x^3} \boxed{\tfrac{\infty}{\infty}} = -2$$

15. Queda:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[ax+b-\frac{x^2+2}{x+2}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{(ax+b)\,(x+2)-(x^2+2)}{x+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(a-1)\,x^2+(2a+b)\,x+2b-2}{x+2}=0$$

Debe ocurrir $\Rightarrow \begin{cases} a-1=0 \\ 2a+b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} a=1 \\ b=-2 \end{array}$

16. Queda:

$$f(x)=\sqrt{2x+3} \;\Rightarrow\; f(x+h)=\sqrt{2\,(x+h)+3}$$

$$\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\sqrt{2\,(x+h)+3}-\sqrt{2x+3}}{h}\boxed{\tfrac{0}{0}}=$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{\left(\sqrt{2x+2h+3}-\sqrt{2x+3}\right)\left(\sqrt{2x+2h+3}+\sqrt{2x+3}\right)}{h\left(\sqrt{2x+2h+3}+\sqrt{2x+3}\right)}=$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{2h}{h\left(\sqrt{2x+2h+3}+\sqrt{2x+3}\right)}=\frac{2}{2\sqrt{2x+3}}=\frac{1}{\sqrt{2x+3}}$$

17. Queda:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3+5x^2}{3x+5x^2}\right)^{ax}\boxed{1^{\infty}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty} ax\left(\frac{3+5x^2}{3x+5x^2}-1\right)}=e^{\frac{-3a}{5}} \;\Rightarrow\; a=-10$$

18. Se calcula del siguiente modo:

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\left(x^2+1\right)=1$$

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\left(3-3x\right)=3$$

$$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\left(3-3x\right)=0$$

$$\lim_{x\to3}f(x)\Rightarrow\begin{cases}\lim\limits_{x\to3^-}f(x)=-6\\ \lim\limits_{x\to3^+}f(x)=-6\end{cases}\Rightarrow\lim_{x\to3}f(x)=-6$$

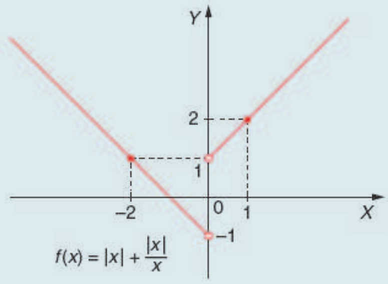
$f(0)=3;\quad f(1)=0;\quad f(3)=-6$

La función $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}-\{0\}$

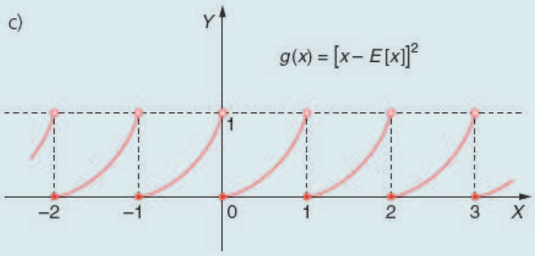
ACTIVIDADES FINALES

■ 19. Estudia la continuidad de las siguientes funciones:

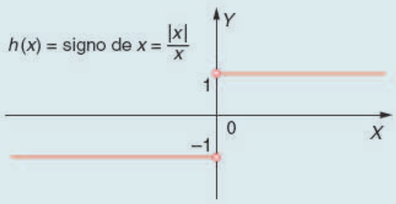
a)



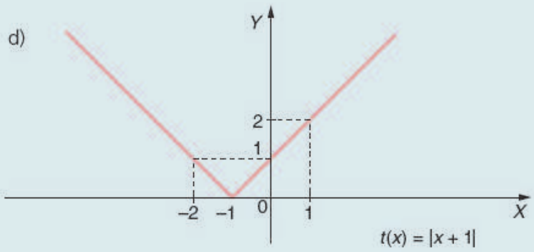
c)



b)



d)



■ 20. Estudia la continuidad de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{2}{x^2 - 9}$

b) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$

c) $f(x) = e^{2x} - 3$

d) $f(x) = x \cdot \ln(2x + 6)$

e) $f(x) = 3 \text{ sen } (x + \pi)$

f) $f(x) = \text{tg } 2x$

■ 21. Estudia la continuidad de las siguientes funciones definidas a trozos:

a) $$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si} \quad x < 2 \\ x - 2 & \text{si} \quad 2 \le x \le 4 \\ 5 & \text{si} \quad x > 4 \end{cases}$$

b) $$g(x) = \begin{cases} \dfrac{5}{x - 5} & \text{si} \quad x \le 0 \\ \sqrt{x + 1} & \text{si} \quad 0 < x \le 3 \\ x - 1 & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}$$

■ 22. Estudia la continuidad de la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{2x - 6}$ en $x = 3$. En caso de presentar discontinuidad evitable, redefínela para que sea continua en $x = 3$.

■ 23. Determina el parámetro *a* para el cual cada una de las siguientes funciones es continua en su dominio de definición:

a) $$f(x) = \begin{cases} ax^2 - 2 & \text{si} \quad x \le 1 \\ \dfrac{4}{x} & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

b) $$f(x) = \begin{cases} e^{x-2} & \text{si} \quad x < 2 \\ a + \ln(x - 1) & \text{si} \quad x \ge 2 \end{cases}$$

19. El estudio queda:

a) $f(x)=|x|+\frac{|x|}{x}$ no es continua en $x=0$, pues no está definida en dicho punto.

b) $g(x)=\left[x-E[x]\right]^2$ es discontinua en todos los puntos de la abscisa entera.

c) $h(x)$ no es continua en $x=0$, pues no está definida en dicho punto.

d) $t(x)$ es continua en toda la recta real.

20. La solución queda:

a) $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}-\{-3,3\}$

b) $f(x)$ es continua en $[-2,2]$

c) $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$

d) $f(x)$ es continua en $(-3,+\infty)$

e) $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$

f) $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{4}+K\cdot\frac{\pi}{2}\right\}$

21. En cada caso queda:

Veamos la continuidad de $f(x)$ en $x=2$ y $x=4$.

$f(2)=0$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\left(x^2-4\right)=0\\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\left(x-2\right)=0\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to 2} f(x)=0=f(2)=0 \Rightarrow \text{Luego } f(x) \text{ es continua en } x=2.$$

$f(4)=2$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 4^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 4^-}\left(x-2\right)=2\\ \lim\limits_{x\to 4^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 4^+} 5=5\end{array}\right\}\Rightarrow \nexists \lim\limits_{x\to 4} f(x) \Rightarrow \text{Luego } f(x) \text{ no es continua en } x=4.$$

Veamos la continuidad de $g(x)$ en $x=0$ y $x=3$.

$g(0)=-1$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-} g(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{5}{x-5}=-1\\ \lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x+1}=1\end{array}\right\}\Rightarrow \nexists \lim\limits_{x\to 0} g(x) \Rightarrow \text{Luego } g(x) \text{ no es continua en } x=0.$$

$g(3)=2$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 3^-} g(x)=\lim\limits_{x\to 3^-}\sqrt{x+1}=2\\ \lim\limits_{x\to 3^+} g(x)=\lim\limits_{x\to 3^+}\frac{10}{x+2}=2\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to 3} g(x)=g(3)=2 \Rightarrow \text{Luego } g(x) \text{ es continua en } x=3.$$

22. La solución es:

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2-9}{2x-6} = \lim_{x \to 3} \frac{(x-3)(x+3)}{2(x-3)} = \frac{6}{2} = 3. \Rightarrow$$ En $x = 3$ tiene una discontinuidad evitable.

La redefinimos: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-9}{2x-6} & \text{si } x \neq 3 \\ 3 & \text{si } x = 3 \end{cases}$

23. La solución es:

Estudiamos la continuidad en $x = 1$.

$$f(1) = a-2$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} \left(ax^2-2\right) = a-2 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{4}{x} = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow a-2=4 \Rightarrow a=6$$

Estudiamos la continuidad en $x = 2$.

$$f(2) = a$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^+} \left(a + \ln(x-1)\right) = a \\ \lim\limits_{x \to 2^-} e^{x-2} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow a=1$$