ANÁLISIS EJERCICIOS DE SELECTIVIDAD
ANDALUCÍA – 2008-2010
MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CC.SS II

Ejercicio 1.- (2010)

Sea la función definida por $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2}{2} & \text{si} \quad x\le 0 \\ x^3-4x^2 & \text{si} \quad 0<x\le 4 \\ 1-\dfrac{4}{x} & \text{si} \quad x>4 \end{cases}$.

a) Estudie su continuidad y derivabilidad.

b) Determine la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x=2$.

Ejercicio 2.- (2010)

Un depósito lleno de agua se vacía por un sumidero que tiene en la parte baja. El volumen de agua, en m^3, que hay en cada momento en el depósito, desde que empieza a vaciarse, viene dado por la función $V(t)=8-t+\dfrac{t^2}{32}$, donde t es el tiempo en minutos.

a) ¿Cuál es la capacidad del depósito?

b) ¿Cuánto tiempo tarda en vaciarse?

c) Represente gráficamente la función V.

d) Calcule la derivada de esa función en $t=8$ e interprete su significado.

Ejercicio 3.- (2010)

Sea la función $f(x)=2x^2+ax+b$.

a) Determine los valores de a y b sabiendo que su gráfica pasa por el punto (1, 3) y alcanza un extremo local en el punto de abscisa $x=-2$.

b) Tomando $a=8$ y $b=-10$ deduzca la curvatura de su gráfica, el valor mínimo que alcanza la función y los valores donde la función se anula.

Ejercicio 4.- (2010)

a) Calcule las derivadas de las siguientes funciones:

$$f(x)=\left(\frac{2-5x}{3}\right)^2+\frac{1-2x}{x^2}; \qquad g(x)=(3x+2)^2\cdot\ln\left(1+x^2\right).$$

b) Halle las asíntotas y los puntos de corte con los ejes de $h(x)=\dfrac{1+2x}{x-2}$.

Ejercicio 5.- (2010)

Sea la función $f(x)=2x^2-\dfrac{1}{3}x^3$. Calcule:

a) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

b) Las coordenadas de sus extremos relativos.

c) El punto de la gráfica en el que la pendiente de la recta tangente a dicha gráfica es 4.

Ejercicio 6.- (2010)

Calcule las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{e^{3x}}{1+x^2}$.

b) $g(x) = \ln\{x(1+3x^2)\}$.

c) $h(x) = 2^{5x} + \dfrac{1}{x^2}$.

Ejercicio 7.- (2010)

En una empresa han hecho un estudio sobre la rentabilidad de su inversión en publicidad, y han llegado a la conclusión de que el beneficio obtenido, en miles de euros, viene dado por la expresión $B(x) = 0.5x^2 - 4x + 6$,

siendo x la inversión en publicidad, en miles de euros, con x en el intervalo $[0,10]$.

a) ¿Para qué valores de la inversión la empresa tiene pérdidas?

b) ¿Cuánto tiene que invertir la empresa en publicidad para obtener el mayor beneficio posible?

c) ¿Cuál es el beneficio si no se invierte nada en publicidad? ¿Hay algún otro valor de la inversión para el cual se obtiene el mismo beneficio?

Ejercicio 8.- (2010)

Sea la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x} & \text{si} \quad x \le 1 \\ x^2 - 4x + 5 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$.

a) Estudie la continuidad y derivabilidad de la función.

b) Represéntela gráficamente.

Ejercicio 9.- (2010)

Sean las funciones

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - x^2 + 2 & \text{si} \quad -1 \le x \le 0 \\ -x^3 - x^2 + 2 & \text{si} \quad 0 < x \le 1 \end{cases}, \qquad h(x) = \begin{cases} -x^2 + x + 2 & \text{si} \quad -1 \le x \le 0 \\ -x^2 - x + 2 & \text{si} \quad 0 < x \le 1 \end{cases}.$$

a) Estudie la continuidad y la derivabilidad de la función f en $x = 0$.

b) Estudie la continuidad y la derivabilidad de la función h en $x = 0$.

c) Si las dos funciones anteriores representan el perfil de un arco puntiagudo de una catedral y el de un arco redondeado (sin picos) de un túnel, indique, razonadamente, la que corresponde a la catedral y la que corresponde al túnel.

Ejercicio 10.- (2010)

El gerente de una empresa sabe que los beneficios de la misma, $f(x)$, dependen de la inversión, x, según la función $f(x) = -x^2 + 11x - 10$.

(x es la cantidad invertida, en millones de euros).

a) Determine los valores de la inversión para los que la función beneficio es no negativa.

b) Halle el valor de la inversión para el cual el beneficio es máximo. ¿A cuánto asciende éste?

c) ¿Entre qué valores ha de estar comprendida la inversión para que el beneficio sea creciente, sabiendo que éste es no negativo?

Ejercicio 11.- (2010)

Un consultorio médico abre a las 5 de la tarde y cierra cuando no hay pacientes.

La expresión que representa el número medio de pacientes en función del tiempo en horas, t, que lleva abierto el consultorio es $N(t)=4t-t^2$

a) ¿A qué hora el número medio de pacientes es máximo? ¿Cuál es ese máximo?

b) Sabiendo que el consultorio cierra cuando no hay pacientes, ¿a qué hora cerrará?

c) Represente gráficamente $N(t)=4t-t^2$, con $N(t)\geq 0$.

Ejercicio 12.- (2010)

Sea la función $f(x)=\begin{cases} -x^2-2ax+3 & \text{si} \quad x\leq 1 \\ ax^2-6x+5 & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$.

a) Calcule el valor de a para que f sea continua en $x=1$.

b) Para $a=1$, represente su gráfica y, a la vista de ella, indique su monotonía y las coordenadas de sus extremos locales.

Ejercicio 13.- (2009)

a) Halle las funciones derivadas de las funciones definidas por las siguientes expresiones:

$$f(x)=\left(2x^2-3\right)^3; \qquad g(x)=\frac{\ln(x)}{x}; \qquad h(x)=x\cdot e^{3x}.$$

b) Determine el dominio y las asíntotas de la función $m(x)=\dfrac{2x+3}{x-4}$.

Ejercicio 14.- (2009)

a) Sea la función $f(x)=\begin{cases} 1-2x & \text{si} \quad x\leq 0 \\ \dfrac{1}{x+1} & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$.

Estudie su continuidad y su derivabilidad.

b) Se consideran las funciones: $g(x)=\left(2x+1\right)^3$, $\quad h(x)=\dfrac{x-1}{2^x}$.

Halle sus funciones derivadas.

Ejercicio 15.- (2009)

La función derivada de una función f viene dada por $f'(x)=3x^2-12x+9$.

a) Obtenga los intervalos de monotonía de la función f y los valores de x en los que dicha función alcanza sus extremos locales.

b) Determine los intervalos de concavidad y convexidad de la función f.

c) Sabiendo que la gráfica de f pasa por el punto (2, 5), calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en dicho punto.

Ejercicio 16.- (2009)

Sea la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + x$.

a) Determine el valor de los parámetros a y b sabiendo que la función f tiene un máximo en $x = 1$ y que $f(1) = 2$.

b) Para $a = b = 1$, halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$.

Ejercicio 17.- (2009)

Sea la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + x & \text{si} \quad x < 0 \\ \dfrac{x}{x+1} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$.

a) Analice la continuidad y la derivabilidad de la función en su dominio.

b) Determine la asíntota horizontal, si la tiene.

c) Determine la asíntota vertical, si la tiene.

Ejercicio 18.- (2009)

Un estudio acerca de la presencia de gases contaminantes en la atmósfera de una ciudad indica que el nivel de contaminación viene dado por la función:

$C(t) = -0.2t^2 + 4t + 25, \quad 0 \leq t \leq 25$ (t = años transcurridos desde el año 2000).

a) ¿En qué año se alcanzará un máximo en el nivel de contaminación?

b) ¿En qué año se alcanzará el nivel de contaminación cero?

c) Calcule la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función $C(t)$ en $t = 8$. Interprete el resultado anterior relacionándolo con el crecimiento o decrecimiento.

Ejercicio 19.- (2009)

Un almacenista de frutas ha estimado que el beneficio que le produce cada kilogramo (kg) de fresas depende del precio de venta de acuerdo con la función

$$B(x) = -x^2 + 4x - 3$$

siendo $B(x)$ el beneficio por kg y x el precio de cada kg, ambos expresados en euros.

a) ¿Entre qué precios se producen beneficios para el almacenista?

b) ¿Qué precio maximiza los beneficios?

c) Si tiene en el almacén 10000 kg de fresas, ¿cuál será el beneficio total máximo que podrá obtener?

Ejercicio 20.- (2009)

Sea la función $f(x) = \begin{cases} 3^x & \text{si} \quad x \leq 1 \\ x^2 - 6x + 8 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$.

a) Estudie la continuidad y la derivabilidad de la función f.

b) Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función f en el punto de abscisa $x = 3$.

***Ejercicio 21*.-** (2009)

Sea la función $f(x) = x^3 - 1$.

a) Calcule los puntos de corte de la gráfica con los ejes, su monotonía y extremos relativos, si los tuviese.

b) Determine su curvatura y punto de inflexión.

c) Halle los puntos de la gráfica en los que la recta tangente tiene de pendiente 3.

***Ejercicio 22*.-** (2009)

Sea la función real de variable real $f(x) = \begin{cases} -x+1 & \text{si} \quad x<1 \\ x-1 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$.

a) Represente gráficamente la función.

b) Estudie la continuidad de la función.

c) Estudie la derivabilidad de la función.

***Ejercicio 23*.-** (2009)

Sea la función $f(x) = \dfrac{x-1}{2x-1}$.

a) Halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función f en el punto (0, 1).

b) Estudie la monotonía de f.

c) Halle las asíntotas, los puntos de corte con los ejes y represente gráficamente la función.

***Ejercicio 24*.-** (2009)

Sea la función $f: R \to R$ definida mediante $f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si} \quad x \leq 0 \\ x^3 - x + 1 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$.

a) ¿Es f continua en $x = 0$? ¿Es continua en su dominio?

b) ¿Es f derivable en $x = 0$? ¿Es derivable en su dominio?

c) Halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 1$.

***Ejercicio 25*.-** (2008)

Sea la función f definida mediante $f(x) = \dfrac{x+1}{2x-1}$.

a) Determine los puntos de corte con los ejes.

b) Estudie su curvatura.

c) Determine sus asíntotas.

d) Represente la función.

***Ejercicio 26*.-** (2008)

a) La gráfica de la derivada de una función f es la recta que pasa por los puntos $(0,-3)$ y $(4,0)$. Estudie la monotonía de la función f.

b) Calcule la derivada de las siguientes funciones:

$$g(x)=(3x+1)^3\cdot L(x^2+1); \qquad h(x)=\frac{e^x}{7x^5-4}.$$

Ejercicio 27.- (2008)

a) Halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)=\dfrac{3}{x}$ en el punto de abscisa $x=-1$.

b) Halle los valores de a y b para que la función $g(x)=ax+\dfrac{b}{x}$ tenga un extremo relativo en el punto $(1, 2)$.

Ejercicio 28.- (2008)

Dada la función $f(x)=4-3x^2+x^3$, determine:

a) La monotonía y la curvatura de f.
b) Los puntos donde la función alcanza sus extremos relativos.
c) La ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=-1$.

Ejercicio 29.- (2008)

Sea la función definida de la forma $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x}{x-1} & \text{si} \quad x<2\\ 2x^2-10x & \text{si} \quad x\geq 2\end{cases}$.

a) Halle el dominio de f.
b) Estudie la derivabilidad de f en $x=2$.
c) Halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=0$.

Ejercicio 30.- (2008)

Sea la función f definida mediante $f(x)=\begin{cases}x^2+ax+b & \text{si} \quad x<1\\ L(x) & \text{si} \quad x\geq 1\end{cases}$.

a) Determine a y b sabiendo que f es continua y tiene un mínimo en $x=-1$.
b) Para $a=-1$ y $b=1$, estudie la derivabilidad de f en $x=-1$ y en $x=1$.

Ejercicio 31.- (2008)

El beneficio de una empresa, en miles de euros, viene dado por la función

$$B(x) = -3x^2 + 120x + 675, \quad x \geq 0$$

donde x representa el gasto en publicidad, en miles de euros.

a) Calcule el gasto a partir del cual la empresa no obtiene beneficios.

b) Calcule el valor de x que produce máximo beneficio. ¿Cuánto es ese beneficio?

c) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento del beneficio de la empresa.

d) Represente gráficamente la función B.

Ejercicio 32.- (2008)

Calcule las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = (x^3 + 1) \cdot e^{7x}$.

b) $g(x) = 3^x \cdot L(x)$.

c) $h(x) = (x^2 + 1) \cdot (x^5 - 6x)^6$.

d) $i(x) = \dfrac{(x+1)^2}{x^2 - 2}$.

Ejercicio 33.- (2008)

Sea la función $f(x) = x^3 - 6x^2$.

a) Determine sus puntos de corte con los ejes.

b) Calcule sus extremos relativos y su punto de inflexión.

c) Represente gráficamente la función.

Ejercicio 34.- (2008)

Sea la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4 & \text{si} \quad x \leq 1 \\ ax + b & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$.

a) Calcule a y b, sabiendo que $f(2) = 7$ y que f es continua en $x = 1$.

b) Determine la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = -1$.

Ejercicio 35.- (2008)

Sea la función definida de la forma $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si} \quad x \leq 0 \\ x^2 + x + 1 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$.

a) ¿Es f continua en $x = 0$? ¿Es continua en su dominio?

b) ¿Es f derivable en $x = 0$? ¿Es derivable en su dominio?

c) Estudie la monotonía de f.

__Ejercicio 36__.- (2008)

a) Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)=\dfrac{2}{x}$ en el punto de abscisa 1.

b) Sea la función $g(x)=x^3+ax^2+b$. Calcule a y b sabiendo que su gráfica presenta un punto de inflexión en el punto (2, 5).