

UNIDAD 1.- Números reales (temas 1 del libro)

1. NUMEROS NATURALES Y ENTEROS

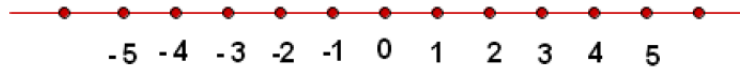
Con los **números naturales** contamos los elementos de un conjunto (**número cardinal**). O bien expresamos la posición u orden que ocupa un elemento en un conjunto (**ordinal**). Se representa por N y sus elementos son.

$$N = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

El conjunto de los números enteros son los naturales y sus correspondientes negativos. Se representa por Z y sus elementos son:

$$Z = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

Gráficamente se representan en una recta horizontal,



Un n° entero a es menor que otro n° entero b cuando $(b - a)$ es positivo, o bien gráficamente cuando a está a la izquierda de b . Se nota por $a < b$ y gráficamente es,



Un n° entero a es mayor que otro n° entero b cuando $(b - a)$ es negativo, o bien gráficamente cuando a está a la derecha de b . Se nota por $a > b$ y gráficamente es,



Un concepto asociado a los números enteros es el de valor absoluto, que de manera burda consiste en convertir al n° en positivo si fuera negativo, y si es positivo dejarlo tal cual.

La definición correcta es la siguiente:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

Ejemplos:

$$|-4| = -(-4) = 4$$

$$|9| = 9$$

$$|0| = 0$$

2. NÚMEROS RACIONALES. POTENCIAS

Se llama número **racional** a todo número que puede representarse como el cociente de dos enteros, con denominador distinto de cero. Matemáticamente se expresa como sigue:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} / a \in \mathbb{Z}; b \in \mathbb{Z}; b \neq 0 \right\}$$

El concepto de potencia de un n° racional y exponente natural es análogo al conocido para los enteros, así por ejemplo:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{2^4}{3^4}$$

Así, se define la potencia de base un n° racional, $\frac{a}{b}$, y exponente entero como:

- Si el exponente es entero positivo: $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

- Si el exponente es cero: $\left(\frac{a}{b}\right)^0 = 1$
- Si el exponente es entero negativo: $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n = \frac{b^n}{a^n}$

Estas potencias tienen las mismas propiedades que las potencias de base un n° entero

1) $\left(\frac{a}{b}\right)^1 = \frac{a}{b}$	2) $\left(\frac{a}{b}\right)^n \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^m = \left(\frac{a}{b}\right)^{n+m}$
3) $\left(\frac{a}{b}\right)^n : \left(\frac{a}{b}\right)^m = \left(\frac{a}{b}\right)^{n-m}$	4) $\left[\left(\frac{a}{b}\right)^n\right]^m = \left(\frac{a}{b}\right)^{n \cdot m}$
5) $\left[\left(\frac{a}{b}\right) \cdot \left(\frac{c}{d}\right)\right]^n = \left(\frac{a}{b}\right)^n \cdot \left(\frac{c}{d}\right)^n$	6) $\left[\left(\frac{a}{b}\right) : \left(\frac{c}{d}\right)\right]^n = \left(\frac{a}{b}\right)^n : \left(\frac{c}{d}\right)^n$

NOTA: Jerarquía de operaciones:

- 1) Los paréntesis y/o corchetes y empezar por los más internos
- 2) Potencias
- 3) Productos y divisiones
- 4) Sumas y restas

Ejercicios resueltos:

1) $\left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^5$	2) $\left(\frac{2}{3}\right)^2 : \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = \left(\frac{2}{3}\right)^5$
3) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} : \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = \frac{2}{3}$	4) $\left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-1} = \frac{3}{2}$
5) $\left[\left(\frac{2}{3}\right)^2\right]^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^6$	6) $\left\{\left[\left(\frac{2}{3}\right)^2\right]^3\right\}^{-4} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-24} = \left(\frac{3}{2}\right)^{24}$
7) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-3} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2}{3}$	8) $\left(\frac{4}{9}\right)^{-2} : \left(\frac{27}{8}\right)^{-3} = \left[\left(\frac{2}{3}\right)^2\right]^{-2} : \left[\left(\frac{3}{2}\right)^3\right]^{-3} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-4} : \left(\frac{3}{2}\right)^{-9} =$ $= \left(\frac{2}{3}\right)^{-4} : \left(\frac{2}{3}\right)^9 = \left(\frac{2}{3}\right)^{-13} = \left(\frac{3}{2}\right)^{13}$

3. RELACIONES ENTRE LOS NÚMEROS RACIONALES Y DECIMALES

Cualquier n° racional se puede expresar como un n° decimal exacto, periódico puro (la parte decimal es sólo periódica) o periódico mixto (la parte decimal tiene una parte no periódica) sin más que dividir numerador entre denominador de la forma habitual

$$\frac{131}{20} = 6,55$$

$$\frac{514}{18} = 28,5\bar{5}$$

$$\frac{272}{220} = 1,3\bar{36}$$

Análogamente, cualquier n° decimal exacto, periódico puro o periódico mixto se puede expresar como un n° racional. Veamos unos ejemplos,

$$2,23 = \frac{223}{100} \quad 3,\overset{\circ}{1}2 = \frac{312 - 3}{99} = \frac{309}{99} = \frac{103}{33} \quad -4,\overset{\circ}{2}3\overset{\circ}{7} = -\frac{4237 - 423}{900} = \frac{3814}{900} = \frac{1907}{450}$$

Podemos concluir entonces, que los números racionales equivalen al conjunto formado por los decimales exactos, los periódicos puros y los periódicos mixtos.

4. NÚMEROS IRRACIONALES. NÚMEROS REALES

Hay números decimales con infinitas cifras decimales que no son periódicos como por ejemplo:

$$3,101001000100001\dots \quad -354,145141451414145\dots$$

A estos números los llamamos **irracionales** y se notan por **I**, y son aquellos números que no se pueden representar por una fracción.

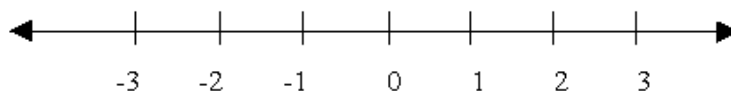
Los números irracionales más conocidos son:

- El número π : $\pi = 3,14159265\dots$
- El número $\sqrt{2}$: $\sqrt{2} = 1,41421356\dots$
- El número de oro ϕ (número áureo): $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,61803398\dots$
- El número e : $e = 2,7182818284\dots$

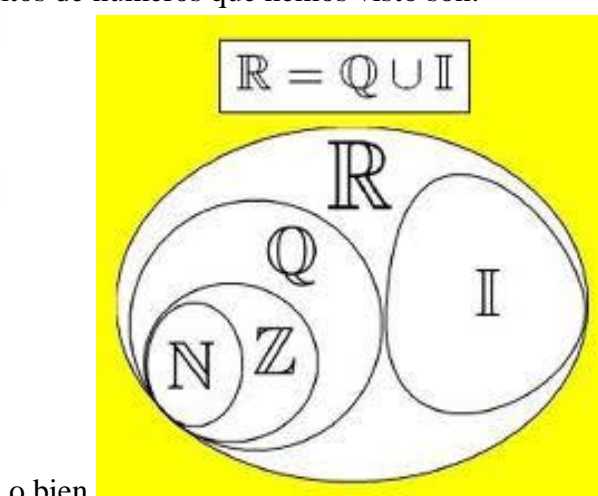
El conjunto de los números racionales en unión con los números irracionales forman el conjunto de los números reales y se denota por la letra **R**

$$\mathbf{R = Q \cup I}$$

Los números reales llenan por completo la recta, cada punto de la recta corresponde a un n° real y viceversa. Por eso la llamamos **recta real**



Resumiendo en un esquema, los conjuntos de números que hemos visto son:



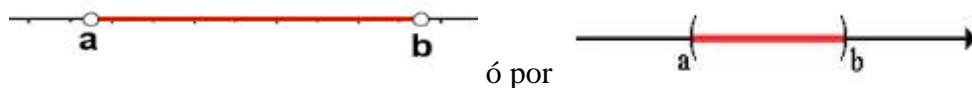
o bien

5. INTERVALOS EN LA RECTA REAL

Símbolos matemáticos			
\in Pertenece a	\notin No pertenece a	\cup Unión	\cap Intersección
\subset Contenido en	\subseteq Contenido o igual a	\exists Existe	\forall Para todo
\Leftrightarrow Sí y sólo si	\Rightarrow Implica	\neg No	\cong Aproximadamente

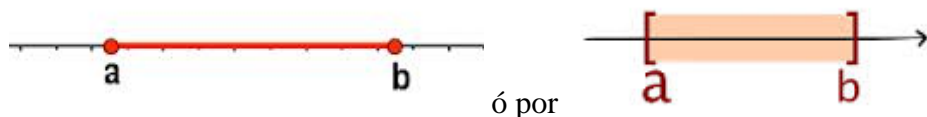
El **intervalo abierto** de extremos a y b es el conjunto de números reales comprendidos entre a y b pero sin incluirlos. Matemáticamente se expresa así: $(a,b) = \{x \in \mathbb{R} \text{ tales que } a < x < b\}$

Se representa gráficamente por



El **intervalo cerrado** de extremos a y b es el conjunto de números reales comprendidos entre a y b incluidos éstos. Matemáticamente se expresa así: $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \text{ tales que } a \leq x \leq b\}$

Se representa gráficamente por

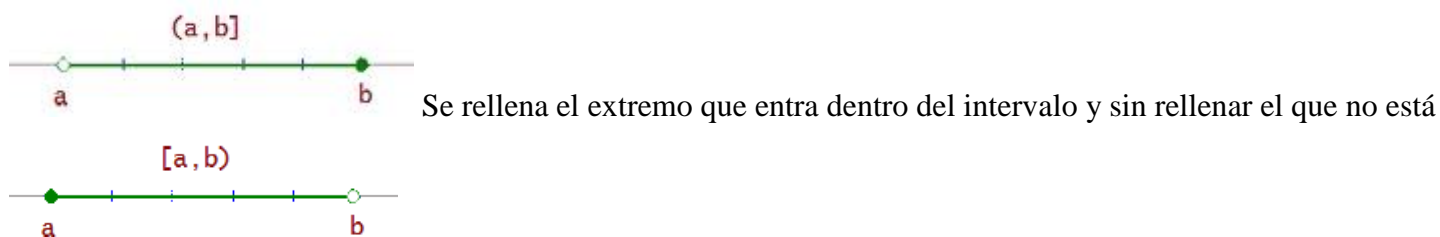


El **intervalo semiabierto o semicerrado** de extremos a y b es el conjunto de números reales comprendidos entre a y b incluido uno sólo de ellos. Matemáticamente se expresa así:

$[a,b) = \{x \in \mathbb{R} \text{ tales que } a \leq x < b\}$ (semiabierto a la izquierda o semicerrado a la derecha)

$(a,b] = \{x \in \mathbb{R} \text{ tales que } a < x \leq b\}$ (semiabierto a la derecha o semicerrado a la izquierda)

Se representa gráficamente por

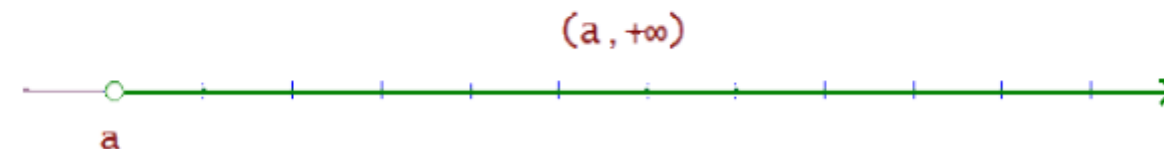


Semirrectas

Las **semirrectas** están determinadas por un número. En una **semirrecta** se encuentran todos los números mayores (o menores) que él.

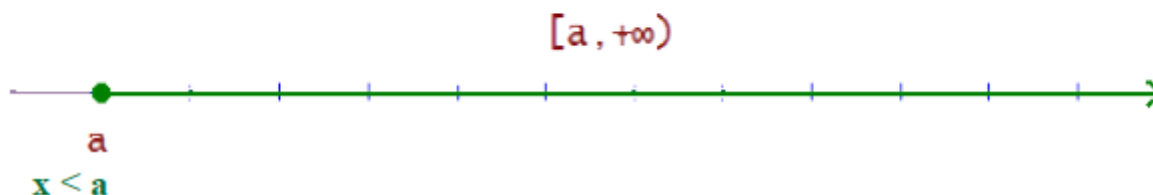
$$x > a$$

$$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} / a < x < +\infty\}$$



$$x \geq a$$

$$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x < +\infty\}$$



$$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} / -\infty < x < a\}$$



$$(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} / -\infty < x \leq a\}$$

6. APROXIMACIONES DECIMALES. REDONDEOS Y TRUNCAMIENTOS

Una **aproximación decimal de orden n por defecto** es una estimación en la cual todas las cifras, incluida la que indica el orden, son las mismas que en el n° original y las demás son cero.

Una **aproximación decimal de orden n por exceso** es una estimación en la cual todas las cifras, excluida la que indica el orden, son las mismas que en el n° original; la que indica el orden es una unidad más y el resto de ellas son cero.

Ejemplo:

Con el n° $\pi = 3,14159265\dots$, tenemos que la aproximación decimal de orden 3 (a la milésima) por defecto es $\pi \cong 3,141$

Y la aproximación decimal por exceso de orden 3 (a la milésima) es $\pi \cong 3,142$

El **redondeo de orden n** de un n° es la mejor aproximación decimal de orden n que se puede dar de ese número. Se observa la cifra que ocupa el lugar de orden n; si la cifra siguiente es inferior a 5, el redondeo es por aproximación decimal por defecto y, si es mayor o igual que 5, el redondeo es la aproximación decimal por exceso.

Ejemplo:

Con el n° $\pi = 3,14159265\dots$, tenemos que redondeo de orden 3 (a la milésima) es $\pi \cong 3,142$ pues la 4ª cifra es un 5 y por tanto la milésima se aumenta en una unidad.

Ahora, el redondeo de orden 5 (a la cienmilésima) es $\pi \cong 3,14159$ pues la 6ª cifra decimal es un 2, y por tanto la cifra de la cienmilésima se queda igual.

El **truncamiento de orden n** de un n° es su aproximación decimal por defecto de orden n

7. NOTACIÓN CIENTÍFICA

Expresar un n° en notación científica ponerlo como un producto cuya cifra de unidades es un dígito del 1 al 9 seguido de una parte decimal, por una potencia de base 10 y exponente entero

$$a,bcd\dots \cdot 10^n$$

Se suele usar para números muy grandes o muy pequeños.

Ejemplos:

$$3\,452\,000\,000 = 3,452 \cdot 10^9$$

$$-0,000\ 000\ 846 = -8,46 \cdot 10^{-7}$$

8. RADICALES

Se llama **raíz enésima** de un n° a , y se denota por $\sqrt[n]{a}$, a otro número b que cumple que $a = b^n$

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow a = b^n$$

La expresión $\sqrt[n]{a}$ se llama **radical**, donde a se llama **radicando** y n se llama **índice**

Un mismo n° o radical puede ser escrito de formas diferentes, usando radicales equivalentes, como por ejemplo

$$\sqrt[3]{2} = \sqrt[15]{2^5} = \sqrt[6]{2^2}$$

Para obtener radicales equivalentes basta multiplicar o dividir por un mismo n° el índice del radical y el exponente del radicando.

Ejemplo: Simplificar los siguientes radicales

$$\sqrt[12]{2^6} = \sqrt[6 \cdot 2]{2^6} = \sqrt{2}$$

$$\sqrt[8]{x^6} = \sqrt[4]{x^3}$$

Ejemplo: Extraer factores de los siguientes radicales:

$$a) \sqrt[3]{x^8} = \sqrt[3]{x^3 \cdot x^3 \cdot x^2} = x \cdot x \cdot \sqrt[3]{x^2} = x^2 \cdot \sqrt[3]{x^2}$$

$$b) \sqrt{16a^5b^7} = \sqrt{4^2 \cdot a^2 \cdot a^2 \cdot a \cdot b^2 \cdot b^2 \cdot b^2 \cdot b} = 4 \cdot a \cdot b \cdot b \cdot \sqrt{ab} = 4 \cdot a^2 \cdot b^3 \sqrt{ab}$$

$$c) \sqrt[3]{64a^6z^3} = \sqrt[3]{2^6 a^6 z^3} = 2^2 \cdot a^2 \cdot z \cdot \sqrt[3]{1} = 4 \cdot a^2 \cdot z$$

Ejemplo: Introducir factores en los siguientes radicales:

$$a) 3\sqrt{5} = \sqrt{3^2 \cdot 5} = \sqrt{45}$$

$$b) a^2 \cdot \sqrt[3]{a \cdot b} = \sqrt[3]{(a^2)^3 \cdot a \cdot b} = \sqrt[3]{a^7 \cdot b}$$

Ejemplo: Efectuar las siguientes operaciones:

$$a) 3\sqrt{2} - \frac{2}{3}\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - \frac{4}{5}\sqrt{2} = \left(3 - \frac{2}{3} + 5 - \frac{4}{5}\right)\sqrt{2} = \left(\frac{45 - 10 + 75 - 12}{15}\right)\sqrt{2} = \frac{98}{15}\sqrt{2}$$

$$b) 2\sqrt[3]{16} - 5\sqrt[3]{54} + \frac{1}{5}\sqrt[3]{250} = 2\sqrt[3]{2^4} - 5\sqrt[3]{2 \cdot 3^3} + \frac{1}{5}\sqrt[3]{2 \cdot 5^3}$$

$$= 2 \cdot 2\sqrt[3]{2} - 5 \cdot 3\sqrt[3]{2} + \frac{1}{5} \cdot 5\sqrt[3]{2} = 4\sqrt[3]{2} - 15\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2} = -10\sqrt[3]{2}$$

Exponente fraccionario: Todo radical se puede expresar como una potencia de exponente fraccionario de la

siguiente forma $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

Las propiedades de las potencias se cumplen igualmente para las potencias de exponente fraccionario.

Ejemplo: Efectúa las siguientes operaciones usando exponente fraccionario:

$$a) \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt{2} = 2^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{3} + \frac{1}{2}} = 2^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{2^5}$$

$$b) \sqrt[5]{2a^4} : \sqrt[5]{2a^3} = \frac{2^{\frac{1}{5}} \cdot a^{\frac{4}{5}}}{2^{\frac{1}{5}} \cdot a^{\frac{3}{5}}} = a^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{a}$$

$$c) a^{-1} \cdot \sqrt[3]{a} = a^{-1} \cdot a^{\frac{1}{3}} = a^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{a^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{a^2}}$$

$$d) \sqrt[4]{27} : \sqrt[3]{9} = \sqrt[4]{3^3} : \sqrt[3]{3^2} = 3^{\frac{3}{4}} : 3^{\frac{2}{3}} = 3^{\frac{3}{4} - \frac{2}{3}} = 3^{\frac{1}{12}} = \sqrt[12]{3}$$

9. RACIONALIZACIÓN DE DENOMINADORES

Al procedimiento por el cual eliminamos los radicales del denominador de una fracción se llama racionalización

Hay diferentes formas:

a) Del tipo $\frac{a}{\sqrt{b}}$: Se multiplica numerador y denominador por \sqrt{b}

Ejemplos: Racionalizar:

$$1) \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{(\sqrt{5})^2} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$$

$$2) \frac{3}{\sqrt{x-1}} = \frac{3}{\sqrt{x-1}} \cdot \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}} = \frac{3\sqrt{x-1}}{(\sqrt{x-1})^2} = \frac{3\sqrt{x-1}}{x-1}$$

b) Del tipo $\frac{a}{b \pm \sqrt{c}}$: Se multiplica numerador y denominador por el conjugado del denominador

Ejemplos: Racionalizar:

$$1) \frac{20}{3-\sqrt{5}} = \frac{20}{3-\sqrt{5}} \cdot \frac{3+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}} = \frac{20(3+\sqrt{5})}{3^2 - (\sqrt{5})^2} = \frac{20(3+\sqrt{5})}{4} = 5(3+\sqrt{5})$$

$$2) \frac{2}{\sqrt{3}+2} = \frac{2}{\sqrt{3}+2} \cdot \frac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}-2} = \frac{2(\sqrt{3}-2)}{\sqrt{3}^2 - 2^2} = \frac{2(\sqrt{3}-2)}{-1} = -2(\sqrt{3}-2)$$

c) Del tipo $\frac{a}{\sqrt{b} \pm \sqrt{c}}$: Análogo al caso anterior

Ejemplos: Racionalizar:

$$1) \frac{20}{\sqrt{15}-\sqrt{5}} = \frac{20}{\sqrt{15}-\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{15}+\sqrt{5}}{\sqrt{15}+\sqrt{5}} = \frac{20(\sqrt{15}+\sqrt{5})}{(\sqrt{15})^2 - (\sqrt{5})^2} = \frac{20(\sqrt{15}+\sqrt{5})}{10} = 2(\sqrt{15}+\sqrt{5})$$

$$2) \frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = \frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} \cdot \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = \frac{(x-y)(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{(\sqrt{x})^2 - (\sqrt{y})^2} = \frac{(x-y)(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{x-y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$$